Educationblog24.com

অধ্যায় ০২ ভেক্টর

টপিক অ্যানালাইসিস

❖ ইঞ্জিনিয়ারিং ভর্তি পরীক্ষার জন্য এই অধ্যায়ের গুরুত্বপূর্ণ টপিকসমূহ:

গুরুত্ব	টপিক	যতবার এসেছে		যেসব ভর্তি পরীক্ষায় প্রশ্ন এসেছে	
		MCQ	Written	MCQ	Written
✪✪✪	T-01: ভেক্টরের লব্ধির সামান্তরিক সূত্র	10	01	BUET'23-24, 22-23, 21-22; RUET'12-13; CUET'15-16; CKRUET'21-22; BUTEX'16-17, 15-16; IUT'10-11; SUST'24-25	BUTEX'02-03
✪	T-02: ভেক্টরের লম্বাংশ ও এর ভেক্টররূপ নির্ণয়	01	-	BUET'21-22	-
✪✪	T-03: একাধিক ভেক্টরের লব্ধি নির্ণয়ের ক্ষেত্রে লম্বাংশ উপপাদ্যের প্রয়োগ	07	01	BUET'24-25, 23-24, 21-22; IUT'14-15, 11-12	RUET'17-18
✪✪✪	T-04: নদী ও নৌকা	04	06	BUET'24-25, 22-23; IUT'18-19	BUET'21-22, 03-04; RUET'10-11; CUET'14-15, 04-05, 03-04
✪✪✪	T-05: আপেক্ষিক বেগ	03	05	CKRUET'22-23; IUT'17-18, 16-17	BUET'06-07; RUET'04-05; BUTEX'24-25, 23-24, 21-22;
✪✪	T-06: অবস্থান ভেক্টর ও সরণ ভেক্টর নির্ণয়	-	01	-	CUET'05-06
✪✪✪	T-07: ভেক্টরের ডট গুণন	13	02	BUET'24-25, 21-22, 07-08; KUET'16-17, 14-15, 13-14, 12-13, 09-10; RUET'24-25, 09-10; BUTEX'11–12	BUET'22-23, 19-20
✪✪✪	T-08: ভেক্টরের ক্রস গুণন	15	02	BUET'24-25, 23-24, 07-08; KUET'18-19, 17-18, 11-12, 10-11; RUET'24-25, 14-15; CUET'11-12 ; CKRUET'23-24; BUTEX'17-18; SUST'16-17;	BUTEX'18-19, 04-05;
✪✪	T-09: গ্রেডিয়েন্ট, ডাইভারজেন্স এবং কার্ল	06	01	BUET'24-25; CUET'15-16; IUT'21-22; SUST'24-25	RUET'15-16
✪	T-10: বিবিধ	02	02	BUET'21-22; BUTEX'14-15; SUST'24-25	BUTEX'22-23, 20-21

Educationblog24.com

CamScanner

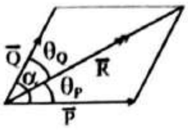
Educationblog24.com

টপিকভিত্তিক বিগত ভর্তি পরীক্ষার প্রশ্ন-সমাধান

Topic-01: ভেক্টরের লব্ধির সামান্তরিক সূত্র

কনসেপ্ট রিভিউ

- $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ দুটি ভেক্টর রাশি হলে, তাদের লব্ধি, $\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}$



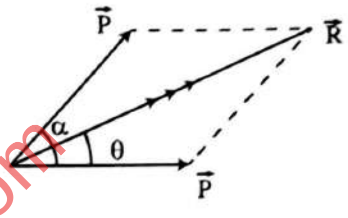
- **লব্ধির মান:**
  P ও Q মানের দুটি ভেক্টরের মধ্যবর্তী কোণ α হলে লব্ধির মান, $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$
- **লব্ধির দিক:**

➤ লব্ধির দিক ($\vec{P}$ এর সাথে), $\theta_P = \tan^{-1}\frac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha}$

➤ লব্ধির দিক ($\vec{Q}$ এর সাথে), $\theta_Q = \tan^{-1}\frac{P\sin\alpha}{Q+P\cos\alpha}$

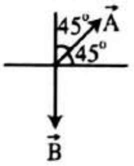
➤ দুইটি সমান ভেক্টর $\vec{P}$ এর মধ্যবর্তী কোণ α হলে,

লব্ধি, $R = 2P\cos\frac{\alpha}{2}$ এবং $\theta = \frac{\alpha}{2}$



MCQ

01. দুটি ভেক্টর রাশির লব্ধির সর্বোচ্চ মান 25 একক এবং সর্বনিম্ন মান 7 একক। ভেক্টর দুটির মান কত? **[SUST'24-25]**
(a) 25, 18 (b) 14, 7
(c) 16, 9 (d) 20, 5 ⓒ
Sol^n: $A + B = 25, A - B = 7 \therefore A = 16, B = 9$

02. 

$|\vec{A}| = 3, |\vec{B}| = 5, |\vec{A} - \vec{B}| = ?$
[BUET'23-24, 22-23]
(a) $\sqrt{13}$ (b) 5.4 (c) 8.6 (d) 7.43 ⓓ
Sol^n: $|\vec{A} - \vec{B}| = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos45°} = 7.43$

03. দুটি সমান ভেক্টরের লব্ধি নাল ভেক্টর হলে ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ কত? **[BUET'21-22]**
(a) 90° (b) 180° (c) 0° (d) 270° ⓑ
Sol^n: $0 = P^2 + P^2 + 2P^2\cos\alpha$
$\Rightarrow \cos\alpha = -1 \therefore \alpha = 180°$

04. দুইটি সমান মানের ভেক্টরের লব্ধির মান কোন অবস্থায় ওদের প্রত্যেকের মানের সমান হতে পারে?
[CKRUET'21-22, BUTEX'15-16, RUET'12-13]
(a) 0° (b) 30° (c) 60°
(d) 90° (e) 120° ⓔ
Sol^n: ধরি, সমান দুইটি ভেক্টরের মান = P
এদের মধ্যবর্তী কোণ α হলে, লব্ধি $= 2P\cos\frac{\alpha}{2}$
লব্ধি P হলে, $2P\cos\frac{\alpha}{2} = P \Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$
$\Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 60° \therefore \alpha = 120°$

05. দুটি ভেক্টরের মধ্যে একটি অন্যটির দ্বিগুণ এবং এদের লব্ধির মান বড় ভেক্টরটির সমান হলে ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যকার কোণের মান- **[BUTEX'16-17]**
(a) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ (b) $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$
(c) $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right)$ (d) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$ ⓒ
Sol^n: প্রশ্নমতে,
$(2P)^2 = P^2 + (2P)^2 + 2P.2P\cos\theta$
$\Rightarrow \cos\theta = -\frac{1}{4}$
$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right)$

06. দুটি ভেক্টর রাশির বৃহত্তর ও ক্ষুদ্রতর লব্ধিদ্বয় যথাক্রমে 28 একক ও 4 একক। রাশি দুটি পরস্পরের সাথে 90° কোণে কোন একটি কণার উপর ক্রিয়া করল। লব্ধির মান কত? **[CUET'15-16, IUT'10-11]**
(a) None of them (b) 28 unit
(c) 24 unit (d) 20 unit ⓓ
Sol^n: $P + Q = 28 ; P - Q = 4 ; P = 16, Q = 12$
$R = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20$ unit

Educationblog24.com

CamScanner

Educationblog24.com

Written

01. $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টর দুটি এমন যে, $|\vec{A}+\vec{B}| = |\vec{A}-\vec{B}|$। ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যকার কোণ নির্ণয় কর। [BUTEX'02-03]

Sol^n: $|\vec{A}+\vec{B}| = |\vec{A}-\vec{B}|$

$\Rightarrow |\vec{A}+\vec{B}|^2 = |\vec{A}-\vec{B}|^2$

$\Rightarrow A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta$

$= A^2 + B^2 + 2AB\cos(180^\circ - \theta)$

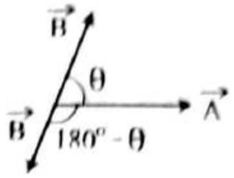
$\Rightarrow A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta$

$= A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta$

$\Rightarrow 4AB\cos\theta = 0$

$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}0 = 90^\circ$

$\therefore \vec{A} \wedge \vec{B} = 90^\circ$ **(Ans.)**



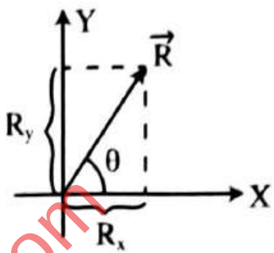
Topic-02: ভেক্টরের লম্বাংশ ও এর ভেক্টররূপ নির্ণয়

কনসেপ্ট রিভিউ

- $\vec{R}$ ভেক্টরের X উপাংশ, $R_x = R\cos\theta$
- $\vec{R}$ ভেক্টরের Y উপাংশ, $R_y = R\sin\theta$

$\therefore \vec{R} = R_x\hat{i} + R_y\hat{j} = (R\cos\theta)\hat{i} + (R\sin\theta)\hat{j}$

[যেখানে θ হলো ধনাত্মক x-অক্ষের সাথে উৎপন্ন কোণ]

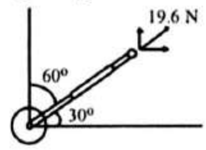


MCQ

01. একটি লন রোলার ঠেলা বা টানার সময় তুমি এর হাতলে অনুভূমিকের সাথে 30° কোণে 19.6N বল প্রয়োগ করছ। এটা টানা অপেক্ষাকৃত সহজ কারণ এর ওজন তখন কমে– [BUET'10-11]

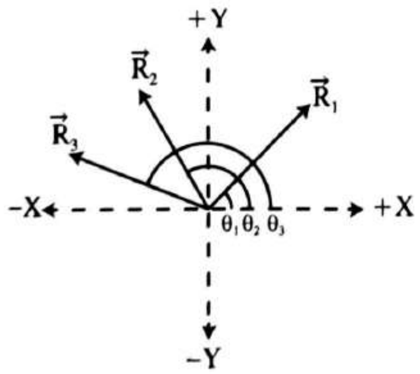
(a) $\sqrt{3}$ kg-weight (b) 19.6 kg-weight (c) 1 kg-weight (d) 9.8 kg-weight ⓒ

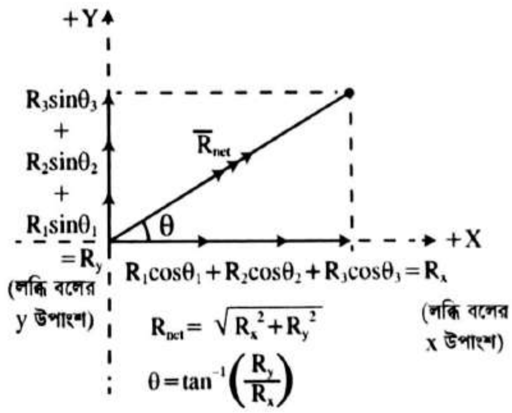
Sol^n: ওজন কমে $= 19.6 \times \cos(60^\circ)$ N $= 9.8$N $= 1$ kg- weight



Topic-03: একাধিক ভেক্টরের লব্ধি নির্ণয়ের ক্ষেত্রে লম্বাংশ উপপাদ্যের প্রয়োগ

কনসেপ্ট রিভিউ





- $\vec{R}_1, \vec{R}_2$ এবং $\vec{R}_3$ ভেক্টরত্রয় +x-অক্ষের সাথে যথাক্রমে θ_1, θ_2 এবং θ_3 কোণ উৎপন্ন করে।
- ভেক্টরত্রয়ের লব্ধি $\vec{R}_{net}$; যা +x-অক্ষের সঙ্গে θ কোণে আনত।

CamScanner

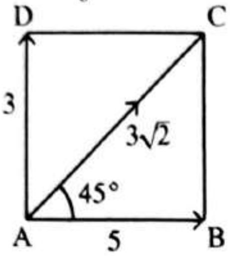
Educationblog24.com

MCQ

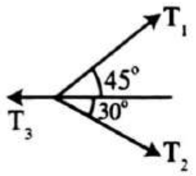
01. ABCD বর্গের AB, AC, AD বাহু বরাবর $5, 3\sqrt{2}, 3$ একক বল ক্রিয়া করলে লব্ধি বলের মান ও দিক কোনটি? (AB বাহুর সাপেক্ষে) [BUET'24-25]

(a) $10, \tan^{-1}\frac{6}{8}$ (b) $10, \tan^{-1}\frac{8}{6}$
(c) $10, \tan^{-1}\frac{3}{8}$ (d) $10, \tan^{-1}\frac{6}{4}$ ⓐ

Solⁿ:



$R_x = 5 + 3\sqrt{2}\cos 45° + 3\cos 90°$
$= 5 + 3 + 0 = 8$
$R_y = 5\sin 0° + 3\sqrt{2}\sin 45° + 3\sin 90°$
$= 3 + 3 = 6$
$R = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10; \theta = \tan^{-1}\frac{6}{8}$

02. 

T_1, T_2 ও T_3 বল তিনটি একই সমতলে ক্রিয়া করে সাম্যবস্থা তৈরি করলে $T_1 : T_2$ কত? [BUET'23-24]

(a) 1:1 (b) $\sqrt{2}:1$
(c) $1:\sqrt{2}$ (d) $2:\sqrt{2}$ ⓒ

Solⁿ: $\frac{T_1}{\sin(180°-30°)} = \frac{T_2}{\sin(180°-45°)}$

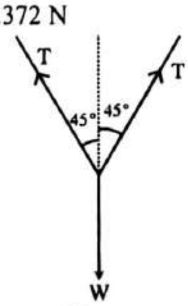
$\Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{\sin 30°}{\sin 45°} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow T_1 : T_2 = 1:\sqrt{2}$

03. 40 kg ভরের বস্তুকে উল্লম্বের সাথে 45° কোণে দুটি সুতা দিয়ে ঝুলিয়ে রাখলে সুতার টান কত হবে? [BUET'23-24]

(a) 277.186 N (b) 288.576 N
(c) 196 N (d) 554.372 N ⓐ

Solⁿ:

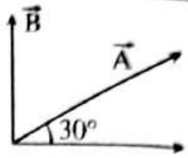


$T\cos 45° + T\cos 45° = W$
$\Rightarrow 2T\cos 45° = 40 \times 9.8$
$\Rightarrow T = \frac{40\times9.8}{\sqrt{2}}$
$\therefore T = 277.186N$

04. x-অক্ষ বরাবর থেকে 30° একটি ভেক্টর $|\vec{A}| = 2$; y অক্ষ বরাবর হতে $|\vec{B}| = 3$ তবে $|\vec{A} - \vec{B}| = ?$ [BUET'22-23]

(a) 2.628 (b) 2.646
(c) 3.6148 (d) 1.5168 ⓑ

Solⁿ: $\vec{A} = 2\cos 30°\hat{i} + 2\sin 30°\hat{j}$
$= \sqrt{3}\hat{i} + \hat{j}; \vec{B} = 3\hat{j}$
$\vec{A} - \vec{B} = \sqrt{3}\hat{i} + (1-3)\hat{j}$
$= \sqrt{3}\hat{i} - 2\hat{j}$

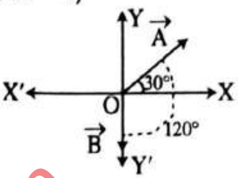


$\therefore |\vec{A} - \vec{B}| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = 2.646$

05. একটি ভেক্টর $\vec{A}$ 30° কোণে ধনাত্মক x-অক্ষের দিকে ক্রিয়ারত। অপর একটি ভেক্টর $\vec{B}$ ঋণাত্মক y-অক্ষের দিকে ক্রিয়ারত। $|A| = 4, |B| = 8$ হলে, লব্ধি ভেক্টর কোনটি? [BUET'21-22]

(a) $2\sqrt{3}\hat{i} + 6\hat{j}$ (b) $\sqrt{7}\hat{i} - 3\hat{j}$
(c) $2\sqrt{3}\hat{i} - 6\hat{j}$ (d) None ⓒ

Solⁿ:



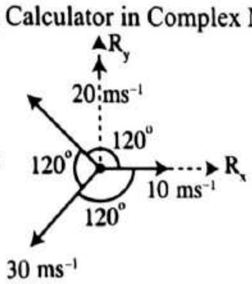
$\therefore \vec{A} = (|A|\cos 30°)\hat{i} + (|A|\cos 60°)\hat{j}$
$\therefore \vec{A} = 2\sqrt{3}\hat{i} + 2\hat{j}$
$\vec{B} = (|B|\cos 270°)\hat{i} + (|B|\cos 180°)\hat{j} = -8\hat{j}$
$\therefore \vec{A} + \vec{B} = (2\sqrt{3})\hat{i} - 6\hat{j}$

06. A particle has 3 velocities 10 ms^{-1}, 20 ms^{-1} and 30 ms^{-1} inclined at angle of 120° to one another. The magnitude of the resultant velocity is- (একটি কণার 3টি বেগ আছে, যথা 10 ms^{-1}, 20 ms^{-1} এবং 30 ms^{-1} এবং বেগগুলোর মধ্যবর্তী কোণ 120°। লব্ধি বেগের মান হলো-) [IUT'14-15]

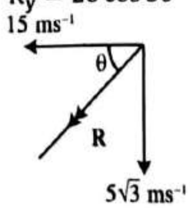
(a) $10\sqrt{3}$ ms^{-1} (b) 10 ms^{-1}
(c) 5 ms^{-1} (d) $\sqrt{3}$ ms^{-1} ⓐ

Solⁿ: $10 + 20(\angle 120°) + 30(\angle 240°)$
$\Rightarrow R = 10\sqrt{3}(\angle -150°)$
[Using Calculator in Complex Mode]

বিকল্প:



$R_x = 10 + 20\cos 120° + 30\cos 120° = -15ms^{-1}$
$R_y = 20\cos 30° + 30\cos 150° = -5\sqrt{3}$ ms^{-1}



$R = \sqrt{15^2 + (5\sqrt{3})^2}$
$= 10\sqrt{3}ms^{-1}$
$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{5\sqrt{3}}{15}\right) = 30°$

$\therefore$ x অক্ষের সাথে 210° কোণ।

Educationblog24.com
CamScanner

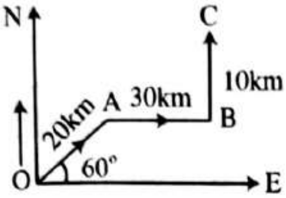
Educationblog24.com

07. The pilot of a private plane flies 20.0 km in a direction 60° north of east, then 30.0 km straight east, then 10.0 km straight north. How far the plane is from the starting point? (একটি ব্যক্তিগত বিমানের পাইলট পূর্বদিকের সাথে 60° কোণে উত্তর দিকে 20.0 কিমি উড়ে, তারপর সোজা পূর্ব দিকে 30.0 কিমি, তারপর সোজা উত্তরে 10.0 কিমি উড়ে। বিমানটি শুরুর স্থান থেকে কত দূরে অবস্থিত?) [IUT'11-12]

(a) 58.44 km (b) 38.44 km
(c) 48.44 km (d) 46.44 km ⓒ

Solⁿ:

$D_E = OA\cos 60° + AB$
$= 20\cos 60° + 30$
$= 40$



$D_N = 20\sin 60° + BC = 20\sin 60° + 10$
$= 10 + 10\sqrt{3}$

$\therefore D = \sqrt{D_E^2 + D_N^2} = 48.44$ km

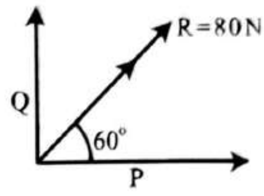
Written

01. পরস্পরের সাথে লম্বভাবে ক্রিয়াশীল দুইটি বলের লব্ধি 80N। যদি লব্ধি একটি বলের সঙ্গে 60° কোণে আনত থাকে, তবে বল দুইটির মান নির্ণয় কর। [RUET'17-18]

Solⁿ:

$P = 80\cos 60°$
$= 40$N **(Ans.)**

আবার, $Q = 80\sin 60°$
$= 40\sqrt{3}$N **(Ans.)**

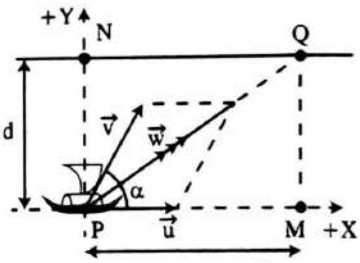


Topic-04: নদী ও নৌকা

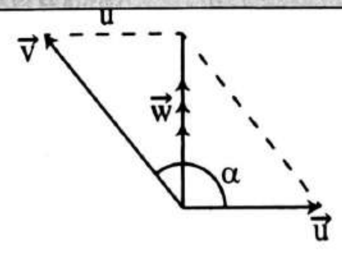
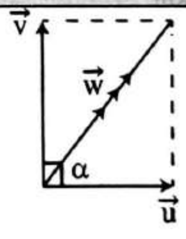
কনসেপ্ট রিভিউ

- $w = \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha}$
- $x = (u + v\cos\alpha)t$
- $d = (v\sin\alpha)t$
- $t = \frac{d}{v\sin\alpha}$
- $s = \sqrt{x^2 + d^2}$

u = স্রোতের বেগ
v = স্থির পানিতে নৌকার বেগ
w = নৌকার লব্ধি বেগ
α = স্রোতের বেগ ও নৌকার বেগের মধ্যবর্তী কোণ।
d = নদীর প্রস্থ = PN
s = অতিক্রান্ত পথ = PQ
t = নৌকা অপর পাড়ে Q বিন্দুতে পৌঁছাতে প্রয়োজনীয় সময়



PM = NQ = x = নদীর পাড় বরাবর নৌকার সরণ

বিষয়বস্তু	ন্যূনতম দূরত্বে নদী পারাপার	ন্যূনতম সময়ে নদী পারাপার
চিত্র		
শর্ত	$\alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{u}{v}\right)$ [v > u]	$\alpha = 90°$
লব্ধি বেগ	$w = \sqrt{v^2 - u^2}$	$w = \sqrt{v^2 + u^2}$
প্রয়োজনীয় সময়	$t = \frac{d}{v\sin\alpha} = \frac{d}{\sqrt{v^2-u^2}} = \frac{d}{w}$	$t = \frac{d}{v\sin 90°} = \frac{d}{v}$
পাড় বরাবর সরণ	$x = 0$	$x = (u + v\cos 90°)t = ut$
পথের দৈর্ঘ্য	$s = d$	$s = \sqrt{d^2 + x^2}$

CamScanner

Educationblog24.com

MCQ

01. একটি নদীর প্রস্থ 400 m এবং স্রোতের বেগ $3ms^{-1}$। একজন মাঝি $5ms^{-1}$ বেগে নৌকা চালিয়ে আড়াআড়িভাবে নদী পার হতে চাইলে কত সময় লাগবে? **[BUET'24-25]**

(a) 80 s (b) 100 s
(c) 120 s (d) 150 s ⓑ

Sol^n: আড়াআড়ি চলার জন্য প্রয়োজনীয় কোণ,

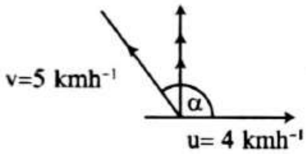
$\alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{3}{5}\right) = 126.86°$

∴ প্রয়োজনীয় সময়, $t = \frac{d}{v \sin\alpha} = \frac{400}{5 \sin 126.86}$

$= 99.987 \approx 100s$

02. $4\ kmh^{-1}$ বেগে প্রবাহমান স্রোতযুক্ত নদীতে কত কোণে নৌকা চালালে $5\ kmh^{-1}$ বেগে নৌকা চালাতে সক্ষম একজন মাঝি ঠিক অপর পাড়ে পৌঁছাতে পারবে? **[BUET'22-23]**

(a) 120° (b) 90°
(c) 136.37° (d) 143.1301° ⓓ

Sol^n:


$v\cos\alpha + u = 0$

$\Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{u}{v}\right) = \cos^{-1}\left(-\frac{4}{5}\right) = 143.1301°$

03. $5\ ms^{-1}$ বেগে প্রবাহমান স্রোত বিশিষ্ট একটি নদীতে $10\ ms^{-1}$ বেগে চলমান নৌকা 1 hour যাত্রা করে সোজা অপর পাড়ে গিয়ে পৌঁছায়। তাহলে নদীর প্রস্থ কত হবে? **[BUET'22-23]**

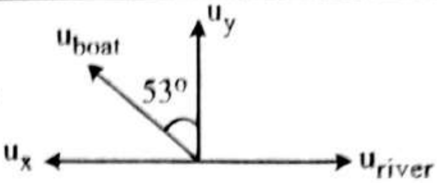
(a) 30 km (b) 31 km
(c) 32 km (d) 29 km ⓑ

Sol^n: $d = \sqrt{10^2 - 5^2} \times 60 \times 60$ m

$= 31.176$ km ≈ 31 km

04. A river flows toward the east. You head your boat 53° west of north and achieve a velocity of $6.0ms^{-1}$ due north relative to the shore. What is your speed relative to the water? (একটি নদী পূর্ব দিকে প্রবাহিত হচ্ছে। তুমি তোমার নৌকাটিকে উত্তর দিকের সাথে 53° পশ্চিমে নিয়ে যাও এবং তীরের সাপেক্ষে উত্তর দিকে $6.0ms^{-1}$ বেগ অর্জন করো। স্রোতের সাপেক্ষে তোমার গতি কত?) **[IUT'18-19]**

(a) $8\ ms^{-1}$ (b) $6\ ms^{-1}$
(c) $10\ ms^{-1}$ (d) $12\ ms^{-1}$ ⓒ

Sol^n:


$u_x = u_{river}$; $\tan 53° = \frac{u_x}{u_y}$

$\Rightarrow u_x = \tan 53° \times u_y = \tan 53° \times 6$

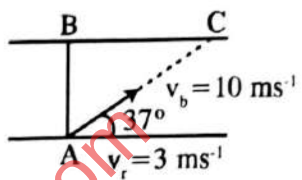
$= 7.96 \approx 8ms^{-1} = u_{river}$

$= 8ms^{-1}(approx) = u_{river}$

$\vec{u}_{relative} = \vec{u}_y - \vec{u}_{river}$

$u_{relative} = \sqrt{8^2 + 6^2 + 2.8.6\cos 90°} = 10\ ms^{-1}$

Written

01. 

36 m চওড়া একটি নদীতে $v_b = 10\ ms^{-1}$ বেগে A বিন্দু থেকে একটি নৌকা চলা শুরু করল। নৌকাটি নদী পার হয়ে চিত্রে প্রদর্শিত বিপরীত তীরের C বিন্দুতে পৌঁছালো। স্রোতের বেগ $v_r = 3\ ms^{-1}$ হলে BC দূরত্ব নির্ণয় কর। এছাড়া, স্রোতের দিকের সাথে কত কোণে রওনা দিলে নৌকাটি সরাসরি B বিন্দুতে পৌঁছাতে পারবে, তা নির্ণয় কর। **[BUET'21-22]**

Sol^n: এখানে, অতিক্রান্ত সময়,

$t = \frac{d}{v\sin\theta} = \frac{36}{10\sin 37°} = 6$ s (প্রায়)

∴ BC এর দৈর্ঘ্য = তীর বরাবর অতিক্রান্ত দূরত্ব

$= (v_r + v_b\cos\theta)t = (3 + 10\cos 37°) \times 6$

$= 65.92$ m **(Ans.)**

ধরি, স্রোতের দিকের সাথে α কোণে রওনা দিতে হবে।

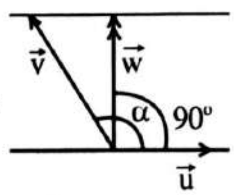
সরাসরি B বিন্দুতে যেতে হলে, নদীর তীর বরাবর সরণ

$= (v_r + v_b\cos\alpha) \times t = 0$

$\Rightarrow 3 + 10\cos\alpha = 0$

$\Rightarrow \alpha = 107.46°$ **(Ans.)**

02. কোন নদীতে একটি নৌকার বেগ স্রোতের অনুকূলে ও প্রতিকূলে যথাক্রমে 18 এবং 6 km h^{-1}। নৌকাটি কত বেগে কোন দিকে চালনা করলে সোজা অপর পাড়ে পৌঁছাবে? **[RUET'10-11]**

Sol^n:


$v + u = 18, v - u = 6$

∴ $v = 12kmh^{-1}, u = 6\ kmh^{-1}$ [v → নৌকার বেগ, u → স্রোতের বেগ]

CamScanner

Educationblog24.com

$u\cos 0^\circ + v\cos\alpha = w\cos 90^\circ$

$\Rightarrow u + v\cos\alpha = 0$

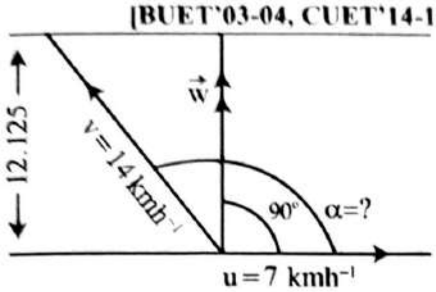
$\Rightarrow \cos\alpha = -\frac{u}{v}$

$\therefore \alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{6}{12}\right) = 120^\circ$

$\therefore$ 12 kmh^{-1} বেগে 120° কোণে **(Ans.)**

03. **একটি ইঞ্জিন চালিত নৌকার বেগ ঘণ্টায় 14 কিলোমিটার। একটি নদী আড়াআড়ি পার হতে হলে নৌকাটিকে কোন দিকে চালাতে হবে? নদীর প্রস্থ 12.125 km হলে তা পাড়ি দিতে কত সময় লাগবে? স্রোতের বেগ ঘণ্টায় 7 km।**
[BUET'03-04, CUET'14-15, 04-05]

Sol^n:



$u\cos 0^\circ + v\cos\alpha = w\cos 90^\circ$

$\Rightarrow 7 + 14\cos\alpha = 0$

$\Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2}$

$\therefore \alpha = 120^\circ$ **(Ans.)**

$t = \frac{d}{v\sin\alpha} = \frac{12.125}{14\sin 120^\circ} = 1$ hour (প্রায়) **(Ans.)**

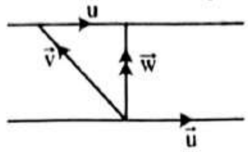
04. **একটি নদীর স্রোতের বেগ 5 ms^{-1}। 10 ms^{-1} বেগের একটি নৌকার সোজাসুজিভাবে নদী পাড়ি দিতে 1 min 40 second সময় লাগে। নদীর প্রস্থ কত? [CUET'03-04]**

Sol^n: নদী সোজাসুজি পার হতে গেলে লব্ধি বেগ,

$w = \sqrt{v^2 - u^2}$ | u = নৌকার বেগ, v = স্রোতের বেগ।

এখানে, $w = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75}\ ms^{-1}$

$d = wt = \sqrt{75} \times (60 + 40) = 866.025$ m **(Ans.)**

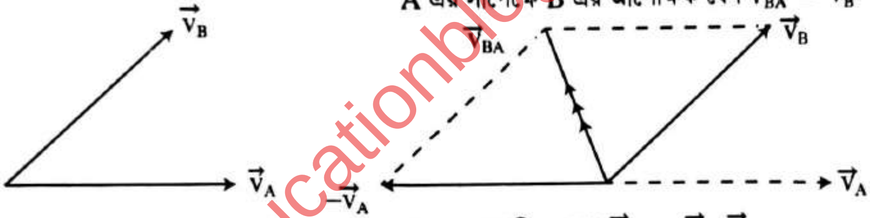


Topic-05: আপেক্ষিক বেগ

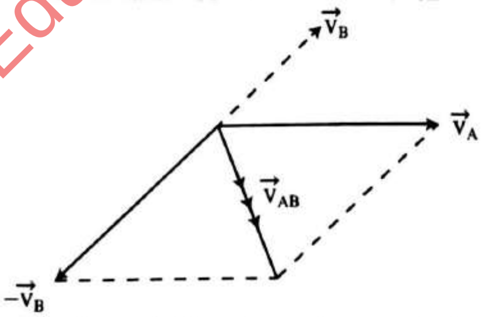
কনসেপ্ট রিভিউ

- যার সাপেক্ষে আপেক্ষিক বেগ, তার বেগকে ভেক্টর বিয়োগ করতে হবে।

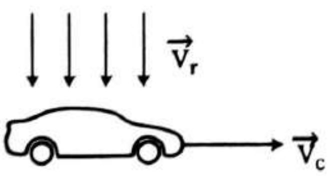
A এর সাপেক্ষে B এর আপেক্ষিক বেগ $\vec{v}_{BA} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$

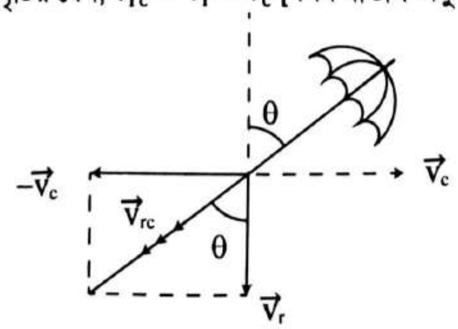


B এর সাপেক্ষে A এর আপেক্ষিক বেগ, $\vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$



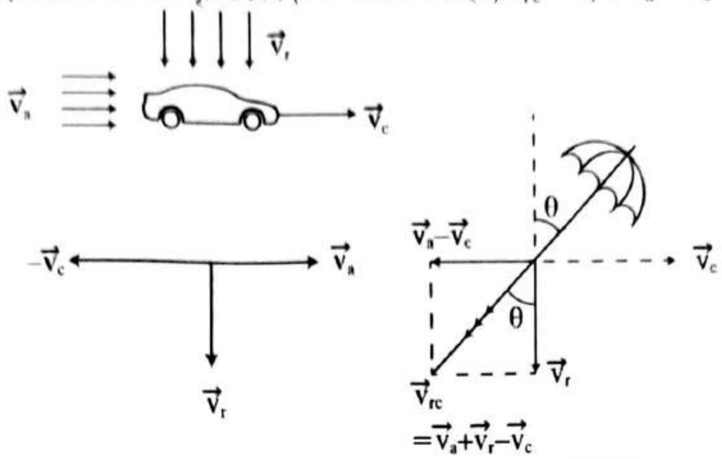
- **Case-01:** পথচারী/গাড়িচালকের সাপেক্ষে বৃষ্টির বেগ, $\vec{v}_{rc} = \vec{v}_r - \vec{v}_c$ [যখন বাতাস অনুপস্থিত]





Educationblog24.com

- **Case-02:** পথচারী/গাড়িচালকের সাপেক্ষে বৃষ্টির বেগ (যখন বাতাস উপস্থিত) $\vec{v}_{rc} = \vec{v}_r + \vec{v}_a - \vec{v}_c$

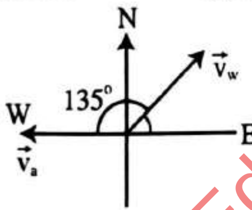


MCQ

01. An airplane flies due west at 185kmh^{-1} with respect to the air. There is a wind blowing at 85kmh^{-1} to the northeast relative to the ground. What is the plane's speed with respect to the ground? (একটি বিমান বাতাসের সাপেক্ষে 185kmh^{-1} বেগে পশ্চিম দিকে বইছিল। ভূমির সাপেক্ষে 85kmh^{-1} বেগে উত্তর-পূর্ব দিকে বাতাস বইছিল। ভূমির সাপেক্ষে বিমানের বেগ কত?) [IUT'16-17]

(a) 139kmh^{-1} (b) 230kmh^{-1}
(c) 239kmh^{-1} (d) 179kmh^{-1} ⓐ

Solⁿ:



$\vec{v}_a = \vec{v} - \vec{v}_w$

$\Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_a + \vec{v}_w$

$\Rightarrow v = \sqrt{185^2 + 85^2 + 2 \times 185 \times 85 \times \cos(135°)}$

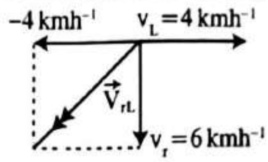
$= 138.6 \text{ kmh}^{-1} \approx 139 \text{kmh}^{-1}$

02. কোনো এক বৃষ্টির দিনে ফাউজিয়া জানালার পাশে দাঁড়িয়ে দেখছিল বৃষ্টি উল্লম্বভাবে 6 kmh^{-1} বেগে পতিত হচ্ছে। ফাউজিয়া লক্ষ করল, রাস্তায় একজন লোক 4 kmh^{-1} বেগে হাঁটছে এবং অপরজন 8 kmh^{-1} বেগে সাইকেলে যাচ্ছে। হেঁটে চলা লোকটির সাপেক্ষে পড়ন্ত বৃষ্টির লব্ধি বেগ কত? [CKRUET'22-23]

(a) 7.01 kmh^{-1} (b) 9.01 kmh^{-1}
(c) 8.21 kmh^{-1} (d) 7.21 kmh^{-1}
(e) 7.0 kmh^{-1} ⓓ

Solⁿ: $\vec{v}_{rL} = \vec{v}_r - \vec{v}_L$

$|v_{rL}| = \sqrt{4^2 + 6^2} = 7.21 \text{ kmh}^{-1}$

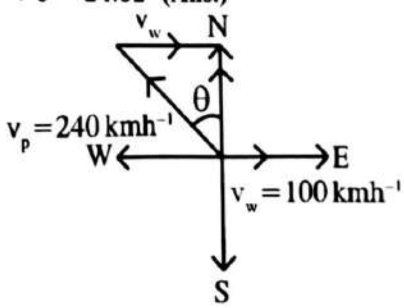


03. A plane has an air speed of 240 kmh^{-1}. What should be the plane's heading if it is to travel due north, relative to the earth in a wind blowing with a velocity of 100 km/hr in an easterly direction? (একটি বিমানের গতিবেগ 240 kmh^{-1}। যদি পূর্ব দিকে 100 km/hr বেগে বাতাস প্রবাহিত হয়, তাহলে ভূমির সাপেক্ষে উত্তর দিকে ভ্রমণ করতে হলে বিমানটির কোন দিকে রওনা দেওয়া উচিত?) [IUT'17-18]

(a) 24.62° (b) 2.462°
(c) 2462° (d) 42.62° ⓐ

Solⁿ: $\sin\theta = \frac{v_w}{v_p} = \frac{100}{240}$

$\Rightarrow \theta = 24.62°$ **(Ans.)**



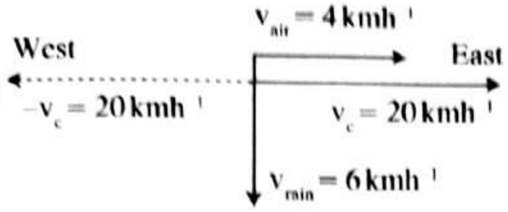
Written

01. একটি গাড়ি 20 km h^{-1} বেগে পূর্বদিকে চলমান। বাতাসও 4 km h^{-1} বেগে একই দিকে চলমান। এসময় বৃষ্টি খাড়া নিচের দিকে 6 km h^{-1} বেগে পড়তে শুরু করে। বৃষ্টি গাড়িতে উল্লম্বের সাথে কত কোণে আঘাত করবে? [BUTEX'23-24]

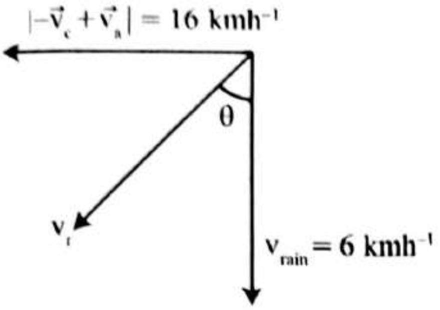
CamScanner

Educationblog24.com

Sol^n:



⇓



$\tan\theta = \frac{|-\vec{v}_c + \vec{v}_a|}{v_{rain}} = \frac{16}{6}$

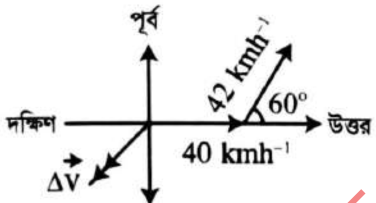
$\Rightarrow \theta = 69.4434°$

∴ বৃষ্টি উল্লম্বের সাথে 69.4439° কোণে পশ্চিমে পড়বে। **(Ans.)**

02. **একটা গাড়ি 40 kmh^{-1} বেগে উত্তর দিকে চলছিল। এরপর গতি পরিবর্তন করে উত্তর দিকের সাথে 60° কোণে 42 kmh^{-1} বেগে চলতে থাকলো। এক্ষেত্রে বেগের পরিবর্তন কত? [BUTEX'21-22]**

Sol^n: $\vec{v}_1 = (40\cos 0°\hat{i} + 40\sin 0°\hat{j})$ kmh^{-1}

$= 40\,\hat{i}$ kmh^{-1}



এবং $\vec{v}_2 = (42\cos 60°\,\hat{i} + 42\sin 60°\hat{j})$kmh^{-1}

$= \left(42 \times \frac{1}{2}\hat{i} + 42 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{j}\right)$ kmh^{-1}

$= (21\,\hat{i} + 21\sqrt{3}\hat{j})$kmh^{-1}

বেগের পরিবর্তন, $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = 21\,\hat{i} + 21\sqrt{3}\hat{j} - 40\,\hat{i}$

$= (-19\hat{i} + 21\sqrt{3}\,\hat{j})$ kmh^{-1}

$\therefore |\Delta\vec{v}| = \sqrt{(-19)^2 + (21\sqrt{3})^2} = \sqrt{1684}$

$= 41.036$ kmh^{-1}

$\therefore \theta = \tan^{-1}\left(\frac{21\sqrt{3}}{19}\right) = 62.41°$

∴ 62.41° কোণে দক্ষিণ দিকের সাথে। **(Ans.)**

03. **কোন একদিন 30 ms^{-1} গতিতে উল্লম্বভাবে বৃষ্টি পড়ছিল। যদি বায়ু 10 ms^{-1} গতিতে উত্তর থেকে দক্ষিণে বইতে শুরু করে তাহলে বৃষ্টি থেকে রক্ষা পেতে তোমার ছাতা কোন দিকে মেলে ধরতে হবে বের কর। [BUTEX'24-25; BUET'06-07]**

Sol^n: ধরি, ছাতা বৃষ্টির দিকের সাথে θ কোণে ধরতে হবে।

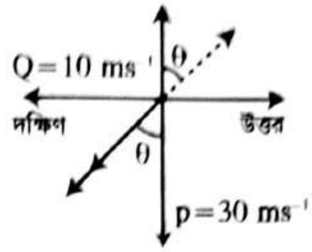
আমরা জানি,

$\tan\theta = \frac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$

$= \frac{10\sin 90°}{30 + 10\cos 90°} = \frac{1}{3}$

$\therefore \theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$

$= 18.43°$



যেহেতু বৃষ্টি উত্তর থেকে দক্ষিণ দিকে উল্লম্বের সাথে 18.43° কোণে পড়ছে। সুতরাং ছাতা উল্লম্বের সাথে উত্তর দিকে 18.43° কোণে ধরতে হবে। **(Ans.)**

04. **10 কিলোমিটার/ঘণ্টা বেগে বৃষ্টি পড়ছে এবং 60 কিলোমিটার/ঘণ্টা বেগে পূর্ব হতে পশ্চিমে বাতাস বইছে। পূর্ব হতে পশ্চিম অভিমুখী চলন্ত গাড়ীর গতিবেগ নির্ণয় কর যাতে (a) গাড়ীর সামনের ও পিছনের কাঁচ ভিজে, (b) শুধুমাত্র পিছনের কাঁচ ভিজে। [RUET'04-05]**

Sol^n: বাতাসের বেগ $\vec{v}_w$, বৃষ্টির বেগ $\vec{v}_r$, গাড়ির বেগ $\vec{v}_c$,

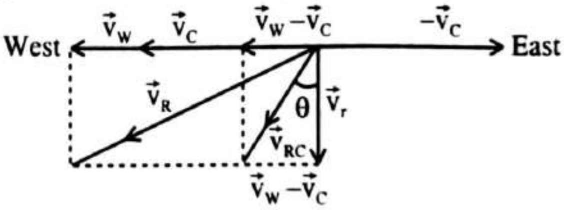
বাতাস ও বৃষ্টির লব্ধি বেগ, $\vec{v}_R = \vec{v}_r + \vec{v}_w$ ……… (i)

গাড়ির সাপেক্ষে বৃষ্টির বেগ, $\vec{v}_{RC} = \vec{v}_R - \vec{v}_C$

$= (\vec{v}_r + \vec{v}_w) - \vec{v}_C$ [(i) থেকে]

$|\vec{v}_w - \vec{v}_C| = |\vec{v}_w + (-\vec{v}_C)| = v_w - v_C$

[East থেকে West বরাবর শুধু $\vec{v}_w$ ও $(-\vec{v}_c)$ বেগ কাজ করছে]



$\tan\theta = \frac{|\vec{v}_w - \vec{v}_C|}{|\vec{v}_r|} = \frac{v_w - v_C}{v_r}$

(a) গাড়ির সামনের ও পেছনের কাচ ভিজলে,

$\theta = 0°$

$\Rightarrow \tan\theta = 0$

$\Rightarrow \frac{v_w - v_C}{v_r} = 0$

$\Rightarrow v_w = v_C$

$\therefore v_C = 60$kmh^{-1} **(Ans.)**

পূর্ব → পশ্চিম

(b) শুধুমাত্র পিছনের কাচ ভিজলে, $\theta > 0$

$\Rightarrow \tan\theta > 0$

$\Rightarrow \frac{v_w - v_C}{v_r} > 0$

$\Rightarrow v_w > v_C$

$\therefore v_C < 60$ kmh^{-1} **(Ans.)**

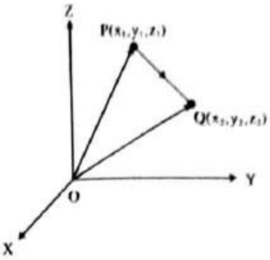
CamScanner

Educationblog24.com

Topic-06: অবস্থান ভেক্টর ও সরণ ভেক্টর নির্ণয়

কনসেপ্ট রিভিউ

- P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর, $\overrightarrow{OP} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$
- Q বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর, $\overrightarrow{OQ} = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}$
- সরণ ভেক্টর,
  $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$



Written

01. (i) কোন বিন্দু P এর স্থানাঙ্ক P (2, –3, 4) হলে বিন্দুটির অবস্থান ভেক্টর নির্ণয় কর। [CUET'05-06]

(ii) A (2, –1, 3) এবং B (–1, 2 –3) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগকারী দিক রাশিটি নির্ণয় কর।

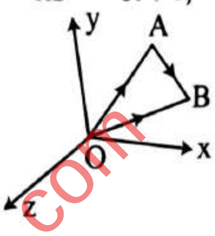
Sol^n: (i) $\vec{r} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$

(ii) $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$

$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$= (-1 - 2)\hat{i} + (2 + 1)\hat{j} + (-3 - 3)\hat{k}$

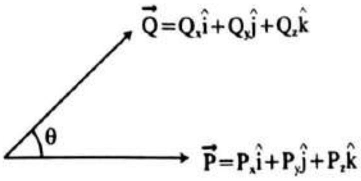
$\therefore \overrightarrow{AB} = -3\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}$ **(Ans.)**

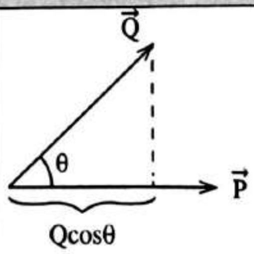
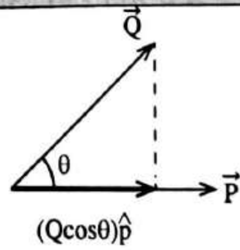
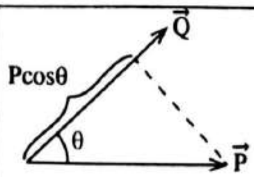
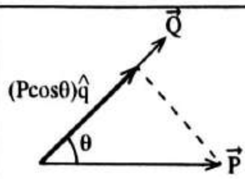


Topic-07: ভেক্টরের ডট গুণন

কনসেপ্ট রিভিউ

- $\vec{P}\cdot\vec{Q} = P_xQ_x + P_yQ_y + P_zQ_z = PQ\cos\theta$
- ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ, $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{P}\cdot\vec{Q}}{PQ}\right)$
- ভেক্টরদ্বয় লম্ব হওয়ার শর্ত, $\vec{P}\cdot\vec{Q} = 0$
- লম্ব অভিক্ষেপ ও উপাংশ:



	লম্ব অভিক্ষেপ (স্কেলার)		উপাংশ (ভেক্টর)	
$\vec{P}$ বরাবর $\vec{Q}$ এর		$Q\cos\theta = \frac{\vec{P}\cdot\vec{Q}}{P}$		$(Q\cos\theta)\hat{p} = \left(\frac{\vec{P}\cdot\vec{Q}}{P}\right)\left(\frac{\vec{P}}{P}\right)$
$\vec{Q}$ বরাবর $\vec{P}$ এর		$P\cos\theta = \frac{\vec{P}\cdot\vec{Q}}{Q}$		$(P\cos\theta)\hat{q} = \left(\frac{\vec{P}\cdot\vec{Q}}{Q}\right)\left(\frac{\vec{Q}}{Q}\right)$

CamScanner

Educationblog24.com

MCQ

01. দুটি ভেক্টর $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 3\hat{i} + 6\hat{j} + 2\hat{k}$। এদের মধ্যবর্তী কোণ কত? **[BUET'24-25]**

(a) 63.92° (b) 33.74°
(c) 123.74° (d) 56.25° ⓑ

Solⁿ: $\theta = \cos^{-1}\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{AB}$

$= \cos^{-1}\frac{(2\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})\cdot(3\hat{i}+6\hat{j}+2\hat{k})}{\sqrt{4+4+9}\times\sqrt{9+36+4}}$

$= \cos^{-1}\frac{6+12+6}{7\sqrt{17}} = 33.74°$

02. $\vec{A} = m\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 10\hat{k}$ পরস্পর দুটি লম্ব ভেক্টর হলে m এর মান কত? **[BUET'24-25]**

(a) −22 (b) 22
(c) 44 (d) −44 ⓑ

Solⁿ: $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$

$\Rightarrow 2m + 6 - 50 = 0$

$\Rightarrow m = 22$

03. $3\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ এবং $3\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ কত? **[BUET'24-25]**

(a) 0° (b) 90°
(c) 137° (d) কোনোটিই নয় ⓑ

Solⁿ: $(3\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k})\cdot(3\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$

$= 3\times3 + 4\times(-1) + (-5)\times1$

$= 9 - 4 - 5 = 0$

$\therefore \theta = \cos^{-1}(0) = 90°$

04. $30\hat{i}(\hat{j}\cdot\hat{k})$ এর মান কত? **[RUET'24-25]**

(a) $30\hat{i}$ (b) $-30\hat{i}$
(c) $3\hat{i}$ (d) $\vec{0}$ (e) $\hat{i}$ ⓓ

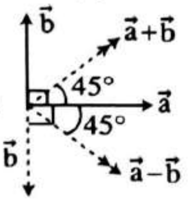
Solⁿ: $30\hat{i}(\hat{j}\cdot\hat{k}) = 30\hat{i}(1\cdot1\cdot\cos 90°)$

$= 30\hat{i}(0) = \vec{0}$

05. $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ দুটি সমান ভেক্টর সমকোণে ক্রিয়া করলে $(\vec{a}+\vec{b})$ ও $(\vec{a}-\vec{b})$ এর ডট গুণফল কত? **[BUET'21-22]**

(a) 0 (b) 4a (c) 2a (d) None ⓐ

Solⁿ:



$\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}-\vec{b}$ এর মধ্যবর্তী কোণ 90° ∴ ডট গুণফল = 0

06. যদি $\vec{P} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ এবং $\vec{Q} = -\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ হলে, $\vec{P}$ এবং $\vec{Q}$ এর মধ্যবর্তী কোণ কত? **[KUET'16-17, 13-14, 12-13, 09-10]**

(a) 111.01° (b) 110.49°
(c) 101.49° (d) 69°
(e) 68.98° ⓐ

Solⁿ: $\cos\theta = \frac{\vec{P}\cdot\vec{Q}}{|\vec{P}||\vec{Q}|} = \frac{-9}{\sqrt{45}\sqrt{14}}$

$\therefore \theta = \cos^{-1}\left(\frac{-9}{\sqrt{45}\sqrt{14}}\right) = 111.01°$

07. "a" এর কোন মানের জন্য ভেক্টর $a\hat{i} - 2\hat{i} + \hat{k}$ এবং $2a\hat{i} - a\hat{j} - 4\hat{k}$ একে অপরের সাথে লম্ব হবে? **[KUET'14-15, RUET' 09-10]**

(a) 3, 1 (b) 2, 4 (c) −2, 1
(d) 3, 2 (e) 1, 5 ⓒ

Solⁿ: $2a^2 + 2a - 4 = 0 \Rightarrow a = 1, -2$

08. $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$। $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ কত? **[BUTEX'11-12]**

(a) 0° (b) 90° (c) 30° (d) 45° ⓑ

Solⁿ: $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$ বা, $AB\cos\theta = 0$

$\therefore \cos\theta = 0 \ \therefore \theta = 90°$

09. যদি $\vec{A} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ হয়, তাহলে $\vec{A}+\vec{B}$ এবং $\vec{A}-\vec{B}$ মধ্যবর্তী কোণ হবে- **[BUET'07-08]**

(a) 60° (b) 30° (c) 90° (d) 120° ⓒ

Solⁿ: $\vec{A}+\vec{B} = 4\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$

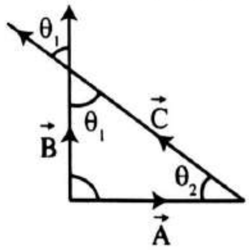
$\vec{A}-\vec{B} = -2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$

$(\vec{A}+\vec{B})\cdot(\vec{A}-\vec{B}) = -8 + 3 + 5 = 0$

∴ মধ্যবর্তী কোণ 90°

Written

01. একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহু দুইটি ভেক্টর $\vec{A} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$ ও $\vec{B} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ দ্বারা চিত্রানুযায়ী গঠিত হলে, ত্রিভুজটির সকল কোণগুলি নির্ণয় করো। **[BUET'22-23]**



Solⁿ: দেওয়া আছে, $\vec{A} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$

এবং $\vec{B} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$

$\therefore \vec{C} = \vec{B} - \vec{A} = (4\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}) - (3\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k})$

$= \hat{i} - 5\hat{j} + 5\hat{k}$

CamScanner

Educationblog24.com

$\theta_1 = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{B}\cdot\vec{C}}{|\vec{B}||\vec{C}|}\right)$

$= \cos^{-1}\left(\frac{4+10+15}{\sqrt{4^2+2^2+3^2}\times\sqrt{1^2+5^2+5^2}}\right)$

$= \cos^{-1}\left(\frac{29}{\sqrt{29}\times\sqrt{51}}\right)$

$= \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{29}}{\sqrt{51}}\right) = 41.055°$ **(Ans.)**

$\theta_3 = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}\right)$

$= \cos^{-1}\left(\frac{12-6-6}{\sqrt{3^2+3^2+2^2}\sqrt{4^2+2^2+3^2}}\right)$

$= \cos^{-1}(0) = 90°$ **(Ans.)**

$\theta_2 = 180° - (\theta_1 + \theta_3)$
$= 180° - (41.055° + 90°)$
$= 48.945°$

02. $\hat{i} + \hat{j}$ ভেক্টরের দিকে $\underline{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j}$ ভেক্টরের উপাংশ নির্ণয় কর। **[BUET'19-20]**

Sol^n: ধরি, $\underline{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j}$ এবং $\underline{B} = \hat{i} + \hat{j}$

$\hat{b} = \frac{B}{|B|} = \frac{\hat{i}+\hat{j}}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{i}+\hat{j})$

$\therefore$ নির্ণেয় উপাংশ $= \hat{b}\frac{A.B}{|B|}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{i}+\hat{j}).\frac{1}{\sqrt{2}}.(2+3)$

$= \frac{5}{2}(\hat{i}+\hat{j})$ **(Ans.)**

Topic-08: ভেক্টরের ক্রস গুণন

কনসেপ্ট রিভিউ

- $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ এর মধ্যবর্তী কোণ θ হলে $\vec{P}\times\vec{Q} = PQ\sin\theta\,\hat{\eta}$
- **যখন দু'টি ভেক্টর সমান্তরাল:**
  যদি দুটি ভেক্টর, $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ ও $\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$ পরস্পর সমান্তরাল হয় তাহলে, $\frac{A_x}{B_x} = \frac{A_y}{B_y} = \frac{A_z}{B_z}$ হবে।
- **ক্ষেত্রফল নির্ণয়:**
  (i) $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ দ্বারা কোনো ত্রিভুজের দুটি সন্নিহিত বাহু নির্দেশিত হলে ঐ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|\vec{A}\times\vec{B}|$
  (ii) $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ দ্বারা কোনো সামান্তরিকের দুটি কর্ণ নির্দেশিত হলে ঐ সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|\vec{A}\times\vec{B}|$
  (iii) $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ দ্বারা কোনো সামান্তরিকের দুটি সন্নিহিত বাহু নির্দেশিত হলে ঐ সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল $= |\vec{A}\times\vec{B}|$
- **আয়তন নির্ণয়:**
  একটি সামান্তরিক ঘনবস্তুর বাহু তিনটি $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ হলে এর আয়তন, $V = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$

MCQ

01. যদি $\vec{A} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}, \vec{B} = 2\hat{i} - 6\hat{j} - 4\hat{k}$ এবং $\vec{C} = 2\hat{i} + a\hat{j} + 3\hat{k}$ তিনটি সমতলীয় ভেক্টর হয়, তাহলে a এর মান কত? **[BUET'24-25]**

(a) $\frac{-25}{11}$ (b) $\frac{11}{25}$ (c) $\frac{25}{11}$ (d) $-\frac{11}{25}$ ⓒ

Sol^n: সমতলীয় হওয়ার শর্ত $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = 0$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & -6 & -4 \\ 2 & a & 3 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow 3(-18+4a) - 4(6+8) + 5(2a+12) = 0$

$\Rightarrow -54 + 12a - 56 + 10a + 60 = 0$

$\Rightarrow 22a = 50$

$\therefore a = \frac{25}{11}$

02. $\vec{A} = 4\hat{i} + m\hat{j} + 2\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 2\hat{i} + 4\hat{j} + n\hat{k}$ পরস্পর সমান্তরাল হলে m ও n এর মান যথাক্রমে কোনটি? **[RUET'24-25]**

(a) 4, 2 (b) 2, 4 (c) 2, 8
(d) 8, 1 (e) 8, 4 ⓓ

Sol^n: সমান্তরাল হলে, $\frac{4}{2} = \frac{m}{4} = \frac{2}{n} \therefore m = 8, n = 1$

03. $3\hat{i} - 4\hat{j} + a\hat{k}, 4\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}, \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ ভেক্টর তিনটি সমতলীয় হলে a এর মান কত? **[BUET'23-24]**

(a) −2 (b) 2 (c) −4 (d) 4 ⓓ

Sol^n: $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} 3 & -4 & a \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow 3(6-2) + 4(-12-1) + a(8+2) = 0$

$\Rightarrow 12 - 52 + 10a = 0$

$\Rightarrow a = 4$

Educationblog24.com

CamScanner

Educationblog24.com

04. $\vec{R}_1 = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 7\hat{k}$ এবং $\vec{R}_2 = 5\hat{i} + 6\hat{j} - 3\hat{k}$ একটি সামান্তরিকের দুইটি কর্ণ নির্দেশ করলে এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো। [CKRUET'23-24]

(a) 32.14 m² (b) 18.55 units
(c) 31.68 units (d) 33.64 cm²
(e) 29.05 units ⓒ

Solⁿ: সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}|\text{কর্ণ} \times \text{কর্ণ}| = \frac{1}{2}|\vec{R}_1 \times \vec{R}_2|$

এখন, $\vec{R}_1 \times \vec{R}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & -2 & 7 \\ 5 & 6 & -3 \end{vmatrix}$

$= \hat{i}(6 - 42) - \hat{j}(-9 - 35) + \hat{k}(18 + 10)$

$\therefore \vec{R}_1 \times \vec{R}_2 = -36\hat{i} + 44\hat{j} + 28\hat{k}$

$\therefore |\vec{R}_1 \times \vec{R}_2| = \sqrt{(-36)^2 + 44^2 + 28^2} = 63.37$ বর্গ একক।

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|\vec{R}_1 \times \vec{R}_2| = \frac{1}{2} \times 63.37$

$= 31.68$ বর্গ একক

05. একক ভেক্টর (Unit vector)-এর ক্ষেত্রে কোন মানটি সঠিক? [BUTEX'17-18]

(a) $\hat{i} \times \hat{i} = 1$ (b) $\hat{i} \times \hat{j} = 0$
(c) $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$ (d) $\hat{i} \times \hat{i} = -1$ ⓒ

06. একটি সামান্তরিকের সন্নিহিত বাহু দুইটি যথাক্রমে $\vec{A} = (3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k})$m এবং $\vec{B} = (2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k})$m। সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল কত? [KUET'18-19, RUET'14-15]

(a) $5.92m^2$ (b) $2.76m^2$ (c) $10.39m^2$
(d) $2.96m^2$ (e) $2.56m^2$ ⓐ

Solⁿ: $|\vec{A} \times \vec{B}| = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}$

$= \hat{i}(-1 - 2) - \hat{j}(-3 + 4) + \hat{k}(-3 - 2)$

$= -3\hat{i} - \hat{j} - 5\hat{k}$

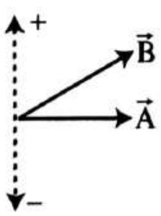
$\therefore |\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{9 + 1 + 25} = 5.92\ m^2$

07. $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরের লম্ব বরাবর একক ভেক্টরের রাশিমালা– [BUTEX'17-18]

(a) $\hat{\eta} = \frac{|\vec{A} \times \vec{B}|}{\vec{A} \times \vec{B}}$ (b) $\hat{\eta} = \frac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A} \times \vec{B}|}$
(c) $\hat{\eta} = \frac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A} \cdot \vec{B}|}$ (d) $\hat{\eta} = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A} \times \vec{B}|}$ ⓑ

Solⁿ: কোনো ভেক্টর রাশিকে তার মান দ্বারা ভাগ করলে একক ভেক্টর পাওয়া যায়। এর মান 1।

$\hat{\eta} = \pm \frac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A} \times \vec{B}|}$ [ক্রস গুণন করলে লম্ব দিকে ভেক্টর পাওয়া যায়।]



08. দুইটি ভেক্টরের স্কেলার গুণফল 20 একক। এদের ভেক্টর গুণফলের মান $6\sqrt{2}$ একক। ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ কত? [KUET'17-18, 11-12]

(a) 30° (b) 24°2′ (c) 22°59′
(d) 22°14′ (e) 23°58′ ⓒ

Solⁿ: $\tan\theta = \frac{AB\sin\theta}{AB\cos\theta} = \frac{|\vec{A} \times \vec{B}|}{\vec{A} \cdot \vec{B}} = \frac{6\sqrt{2}}{20}$

$\therefore \theta = \tan^{-1}\left(\frac{6\sqrt{2}}{20}\right) = 22°59'$

09. m এর মান কত হলে $\vec{A} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$ এবং $\vec{B} = m\hat{i} + 6\hat{j} - 10\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হবে? [SUST'16-17, KUET'10-11]

(a) −2 (b) −1 (c) 1
(d) 2 (e) 3 ⓐ

Solⁿ: A||B হলে, $\frac{1}{m} = -\frac{3}{6} = \frac{5}{-10} \therefore m = -2$

10. একটি সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর যার কর্ণদ্বয় যথাক্রমে $\underline{A} = 3\underline{i} - 2\underline{j} + 5\underline{k}$ এবং $\underline{B} = \underline{i} + 6\underline{j} - \underline{k}$। [KUET'14-15]

(a) 10.95 sq. unit (b) 17.6 sq. unit
(c) 17.66 sq. unit (d) 15.74 sq. unit
(e) 18.97 sq. unit ⓒ

Solⁿ: $\vec{A} \times \vec{B} = -28\hat{i} + 8\hat{j} + 20\hat{k}$

$\therefore |\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{28^2 + 8^2 + 20^2} = 35.327$

$\therefore \text{Area} = \frac{|\vec{A} \times \vec{B}|}{2} = 17.66$ sq. unit

11. দুটি ভেক্টরের স্কেলার গুণফল 18 এবং ভেক্টর গুণফলের মান $6\sqrt{3}$। ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ কত? [KUET'11-12]

(a) 20° (b) 25° (c) 27°
(d) 30° (e) 40° ⓓ

Solⁿ: $AB\cos\theta = 18; AB\sin\theta = 6\sqrt{3}$

$\therefore \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \therefore \theta = 30°$

12. নিম্নলিখিত ভেক্টর প্রোডাক্টের মান বাহির কর:
$(2\hat{i} - 3\hat{j}).|(\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) \times (3\hat{i} - \hat{k})|$ [CUET'11-12]

(a) 4 (b) 8
(c) −4 (d) None of these ⓓ

Solⁿ: $\underbrace{(2\hat{i} - 3\hat{j})}_{\text{vector}}.\underbrace{|(\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) \times (3\hat{i} - \hat{k})|}_{\text{scalar}}$

উভয় রাশি-ই ভেক্টর না হলে ডট/স্কেলার গুণ করা যায় না।

13. যদি $\vec{AB} = 2\hat{i} + \hat{j}$ এবং $\vec{AC} = 3\hat{i} + \hat{j} + 5\hat{k}$ হয়, তবে AB ও AC কে সন্নিহিত বাহু ধরে অঙ্কিত সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল হবেঃ [BUET'07-08]

(a) $8\sqrt{5}$ (b) $5\sqrt{6}$ (c) $3\sqrt{14}$ (d) $6\sqrt{5}$ ⓒ

Educationblog24.com
CamScanner

Educationblog24.com

Solⁿ: $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

$= \hat{i}(5) - \hat{j}(10) + \hat{k}(2-3) = 5\hat{i} - 10\hat{j} - \hat{k}$

$\therefore$ Area $= \sqrt{25+100+1} = \sqrt{126} = 3\sqrt{14}$

Written

01. $\vec{A} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$, $\vec{B} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ এবং $\vec{C} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$ তিনটি ভেক্টর। দেখাও যে, ভেক্টর তিনটি একই সমতলে অবস্থিত। **[BUTEX'04-05]**

Solⁿ: $\vec{A} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$, $\vec{B} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$, $\vec{C} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$

এখন, $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix}$

$= 2(-10+12) - (15-4) - 1(-9+2)$

$= 4 - 11 + 7 = 0$

$\therefore$ ভেক্টরত্রয় সমতলীয়। (দেখানো হলো)

02. $\vec{A}.\vec{A}$ এবং $\vec{A} \times \vec{A}$ এর মান নির্ণয় কর। **[BUTEX'18-19]**

Solⁿ: $\vec{A}.\vec{A} = |\vec{A}| \cdot |\vec{A}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{A}|^2 = A^2$ **(Ans.)**

$\vec{A} \times \vec{A} = |\vec{A}||\vec{A}| \sin 0^\circ \ \hat{\eta} = \underline{0}$ ($\underline{0}$ হলো শূন্য বা নাল ভেক্টর)

$\therefore |\vec{A} \times \vec{A}| = \underline{0}$ **(Ans.)**

Topic-09: গ্রেডিয়েন্ট, ডাইভারজেন্স এবং কার্ল

কনসেপ্ট রিভিউ

- ভেক্টর অপারেটর, $\vec{\nabla} = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$
- স্কেলার ক্ষেত্র $\varphi(x,y,z)$ এর গ্রেডিয়েন্ট, grad $\varphi = \vec{\nabla}\varphi = \hat{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}$
- ভেক্টর ক্ষেত্র $\vec{V}(x,y,z) = V_x\hat{i} + V_y\hat{j} + V_z\hat{k}$ এর ডাইভারজেন্স, div $\vec{V} = \vec{\nabla}\cdot\vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$
- ভেক্টর ক্ষেত্র $\vec{V}(x,y,z) = V_x\hat{i} + V_y\hat{j} + V_z\hat{k}$ এর কার্ল, curl $\vec{V} = \vec{\nabla}\times\vec{V} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}$
- Curl $\vec{V} = 0$ হলে ক্ষেত্রটি অঘূর্ণনশীল ও সংরক্ষণশীল।
- Curl $\vec{V} \neq 0$ হলে ঘূর্ণনশীল ও অসংরক্ষণশীল।
- (div $\vec{V} > 0$) → অপসারী, Density কমে, Volume বাড়ে।
- (div $\vec{V} < 0$) → অভিসারী, Density বাড়ে, Volume কমে।
- (div $\vec{V} = 0$) → ক্ষেত্রটি সলিনয়ডাল, Density ও Volume ধ্রুবক।

Educationblog24.com

MCQ

01. $\vec{r}$ সলিনয়ডাল হলে, $\vec{\nabla}\cdot\vec{r}$ =? **[BUET'24-25]**
(a) 0 (b) > 0 (c) < 0 (d) None ⓐ

02. অবস্থান ভেক্টরের ডাইভারজেন্সের মান কত? **[BUET'24-25]**
(a) 3 (b) 0 (c) 1 (d) 2 ⓐ

Solⁿ: $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

div $\vec{r} = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 1 + 1 + 1 = 3$

03. কোনো ভেক্টরের ডাইভারজেন্স $2(x+y+z)$ হলে ভেক্টরটি কী? **[SUST'24-25]**
(a) $x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ (b) $x^2\hat{i} + y^2\hat{j} + z\hat{k}$
(c) $x^2\hat{i} + y^2\hat{j} + z^2\hat{k}$ (d) $x\hat{i} + y^2\hat{j} + z^2\hat{k}$ ⓒ

Solⁿ: $\vec{\nabla}\cdot(x^2\hat{i} + y^2\hat{j} + z^2\hat{k}) = 2(x+y+z)$

04. If $\varphi = 2xy^4 - x^2z$, then determine $\vec{\nabla}\varphi$ at point $(2,-1,2)$. ($\varphi = 2xy^4 - x^2z$, হলে $(2,-1,2)$ বিন্দুতে $\vec{\nabla}\varphi$ এর মান নির্ণয় কর।) **[IUT'21-22]**
(a) $-(16\hat{i} + 16\hat{j} + 4\hat{k})$ (b) $-(6\hat{i} + 4\hat{j} + 4\hat{k})$
(c) $-(6\hat{i} + 6\hat{j} + 4\hat{k})$ (d) $-(6\hat{i} + 16\hat{j} + 4\hat{k})$ ⓓ

Solⁿ: $\varphi = 2xy^4 - x^2z$

$\vec{\nabla}\varphi = \left(\frac{\delta}{\delta x}\hat{i} + \frac{\delta}{\delta y}\hat{j} + \frac{\delta}{\delta z}\hat{k}\right)(2xy^4 - x^2z)$

$= \frac{\delta\varphi}{\delta x}\hat{i} + \frac{\delta\varphi}{\delta y}\hat{j} + \frac{\delta\varphi}{\delta z}\hat{k}$

$= (2y^4 - 2zx)\hat{i} + (2x\cdot 4y^3)\hat{j} + (-x^2)\hat{k}$

$\vec{\nabla}\varphi_{(2,-1,2)} = \{2(-1)^4 - 2\cdot 2\cdot 2\}\hat{i}$
$+\{2\cdot 2\cdot 4(-1)^3\}\hat{j} + (-2^2)\hat{k}$
$= -6\hat{i} - 16\hat{j} - 4\hat{k} = -(6\hat{i} + 16\hat{j} + 4\hat{k})$

CamScanner

05. A solenoidal vector field is given as $\vec{V} = (5x + 2y)\hat{i} + (my - z)\hat{j} + (x - 4z)\hat{k}$. What is the value of m? (একটি সলিনয়ডাল ভেক্টর ক্ষেত্র $\vec{V} = (5x + 2y)\hat{i} + (my - z)\hat{j} + (x - 4z)\hat{k}$ দেওয়া আছে। m এর মান কত?) [IUT'21-22]

(a) −2 (b) −1 (c) 1 (d) 3 — ⓑ

Solⁿ: $\vec{\nabla}.\vec{V} = \left(\frac{\delta}{\delta x}\hat{i} + \frac{\delta}{\delta y}\hat{j} + \frac{\delta}{\delta z}\hat{k}\right)$
$.\{(5x + 2y)\hat{i} + (my - z)\hat{j} + (x - 4z)\hat{k}\}$
$= 5 + m - 4 = 1 + m$
For being solenoidal, $\vec{\nabla}.\vec{V} = 0$
$\Rightarrow 1 + m = 0$
$\Rightarrow m = -1$

06. a, b ও c এর মান কত হলে $\vec{V} = (x + y + az)\hat{i} + (bx + 3y - z)\hat{j} + (3x + cy + z)\hat{k}$ ভেক্টরটি অঘূর্ণনশীল হবে? [CUET'15-16]

(a) (3, 1, 1) (b) (3, −1, −1)
(c) (−3, 1, −1) (d) (3, 1, −1) — ⓓ

Solⁿ: $\nabla \times \vec{V} = 0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x + y + az & bx + 3y - z & 3x + cy + z \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow \hat{i}(c + 1) + \hat{j}(a - 3) + \hat{k}(b - 1) = 0$
$\Rightarrow a = 3, b = 1, c = -1$

Written

01. p এর মান কত হলে ভেক্টর $\vec{V} = (5x + 2y)\hat{i} + (2py - z)\hat{j} + (x - 2z)\hat{k}$ সলিনয়ডাল হবে? [RUET'15-16]

Solⁿ: $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{\partial(5x+2y)}{\partial x} + \frac{\partial(2py-z)}{\partial y} + \frac{\partial(x-2z)}{\partial z} = 0$
$\Rightarrow 5 + 2p - 2 = 0$
$\Rightarrow p = -\frac{3}{2}$ (Ans.)

Topic-10: বিবিধ

MCQ

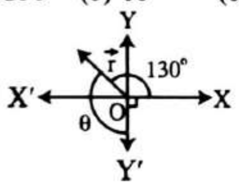
01. কোনটি ভেক্টর রাশি নয়? [SUST'24-25]

(a) তাপমাত্রা (b) চৌম্বকবল
(c) বেগ (d) তড়িৎ প্রাবল্য — ⓐ

02. xy সমতলে একটি ভেক্টর x-অক্ষের সাথে 130° কোণ তৈরি করে। ভেক্টরটি ঋণাত্মক y-অক্ষের সাথে কত কোণ তৈরি করবে? [BUET'21-22]

(a) −130° (b) 40° (c) 140° (d) −40° — ⓒ

Solⁿ:



এখানে, $\theta + 90° + 130° = 360°$
$\Rightarrow \theta = 360° - 220° = 140°$

03. কোন দুটি স্কেলার রাশি? [BUTEX'14-15]

(a) তড়িৎক্ষেত্র, তড়িৎ বিভব (b) গতিশক্তি, বেগ
(c) কেন্দ্রীয় বল, তাপমাত্রা (d) চার্জ, কম্পাঙ্ক — ⓓ

Solⁿ: তড়িৎ ক্ষেত্র, বেগ, বল ভেক্টর রাশি।

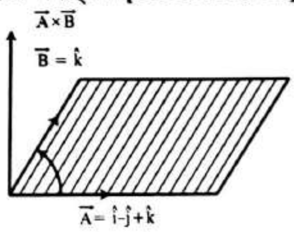
Written

01. যদি $\vec{r} = bt^2\hat{i} + ct^3\hat{j}$ হয়, যেখান b ও c ধনাত্মক ধ্রুবক। কখন বেগ ভেক্টর x ও y অক্ষের সাথে 45° কোণে থাকবে? [BUTEX'22-23]

Solⁿ: দেওয়া আছে, $\vec{r} = bt^2\hat{i} + ct^3\hat{j}$
∴ বেগ, $\frac{d}{dt}(\vec{r}) = \vec{v} = \frac{d}{dt}(bt^2\hat{i} + ct^3\hat{j})$
$\Rightarrow \vec{v} = 2bt\hat{i} + 3ct^2\hat{j}$
এখন, $\vec{v}$ ভেক্টরটির x অক্ষের সাথে কোণ, $\theta = 45°$
$\therefore \tan 45° = \frac{3ct^2}{2bt}$
$\Rightarrow 3ct^2 - 2bt = 0$
$\Rightarrow t(3ct - 2b) = 0$
$\therefore t = 0, t = \frac{2b}{3c}$ (Ans.)

02. এমন একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর, যা xy তলের সমান্তরাল এবং $\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টরের সমকোণে অবস্থিত। [BUTEX'20-21]

Solⁿ: xy তলের সমান্তরাল হলে ভেক্টরটি হবে z অক্ষের উপর লম্ব। ∴ $(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$ এবং $\hat{k}$ এর সাথে সমকোণে অবস্থিত ভেক্টর।



$\vec{P} = (\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \times \hat{k} = -\hat{j} - \hat{i} = -(\hat{i} + \hat{j})$
∴ $(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$ এবং $\hat{k}$ এর সাথে লম্ব বরাবর একক ভেক্টর
$= \frac{\pm(\hat{i}+\hat{j})}{\sqrt{1+1}} = \pm\frac{(\hat{i}+\hat{j})}{\sqrt{2}}$ (Ans.)
বিকল্প: ধরি, ভেক্টর $= x\hat{i} + y\hat{j}$
$\therefore (x\hat{i} + y\hat{j}).(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) = 0$
$\Rightarrow x - y = 0 \therefore x = y$
∴ একক ভেক্টর $= \pm\frac{x\hat{i}+y\hat{j}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \pm\frac{x(\hat{i}+\hat{j})}{\sqrt{2}x} = \pm\frac{\hat{i}+\hat{j}}{\sqrt{2}}$ (Ans.)

Educationblog24.com
CamScanner

সম্ভাব্য MCQ প্রশ্ন

01. দুটি দিক রাশির সর্বোচ্চ মান 12 একক এবং সর্বনিম্ন মান 2 একক। রাশিদ্বয়ের মান নির্ণয় কর। [ইসহাক স্যার]
(a) 6 একক ও 8 একক (b) 7 একক ও 5 একক
(c) 9 একক ও 10 একক (d) 7 একক ও 11 একক

02. যদি দুটি সমান ভেক্টরের লব্ধি এদের যেকোনো একটির সমান হয় তবে ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ হবে- [ইসহাক স্যার]
(a) 0° (b) 180° (c) 90° (d) 120°

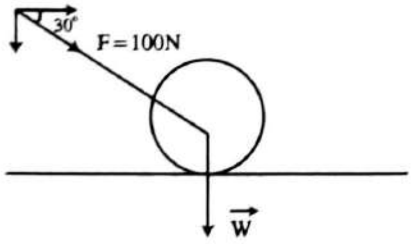
03. দুটি একক ভেক্টরের সমষ্টি একটি একক ভেক্টর। এদের বিয়োগফল কত? [ইসহাক স্যার]
(a) $\sqrt{2}$ (b) $\sqrt{3}$ (c) $\sqrt{4}$ (d) $\sqrt{7}$

04. দুটি ভেক্টর রাশির বৃহত্তর ও ক্ষুদ্রতর লব্ধিদ্বয় যথাক্রমে 28 একক এবং 4 একক। রাশি দুটি পরস্পরের সাথে 90° কোণে কোনো একটি কণার ওপর ক্রিয়া করল। লব্ধির মান কত? [ইসহাক স্যার]
(a) 28 unit (b) 24 unit
(c) 20 unit (d) কোনোটিই নয়

05. দুটি দিক রাশির প্রত্যেকটির মান 10 একক। এদের লব্ধির মান $10\sqrt{2}$ একক হলে তাদের মধ্যবর্তী কোণ কত? [তপন স্যার]
(a) 0° (b) 60° (c) 90° (d) 120°

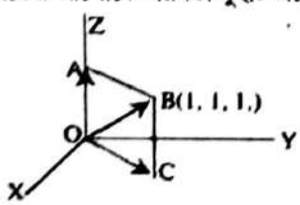
06. কোনো ভেক্টর R কে যদি দুটি পরস্পর লম্ব উপাংশে বিভাজিত করা হয় তাহলে R এর সাথে- [তপন স্যার]
(i) α কোণে উপাংশের মান $X = R\cos\alpha$
(ii) $(90° - \alpha)$ কোণে উপাংশের মান $Y = R\sin\alpha$
(iii) β কোণে উপাংশের মান $Y = R\sin\beta$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

07. একটি লনরোলারের ভর 10 kg। এর উপর নিচের চিত্রের ন্যায় বল প্রয়োগ করা হয়েছে। [$g = 9.8\ ms^{-2}$] [তফাজ্জল স্যার]



লন রোলারটির আপাত ওজন বৃদ্ধির পরিমাণ কত?
(a) 50 N (b) 86.6 N (c) 98 N (d) 148 N

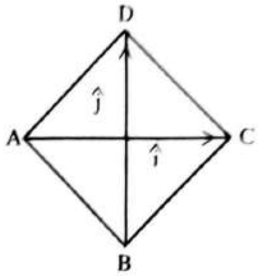
নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:



08. $\vec{OC}$ ভেক্টর কোনটি? [ইসহাক স্যার, প্রামাণিক স্যার]
(a) $\hat{i} + \hat{j}$ (b) $\hat{j} + \hat{k}$ (c) $\hat{i} + \hat{k}$ (d) $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$

09. OABC ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল- [ইসহাক স্যার]
(a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (b) $\sqrt{2}$ (c) 2 (d) $2\sqrt{3}$

10. চিত্রে কর্ণদ্বয় হচ্ছে $\vec{AC} = \hat{i}$ ও $\vec{BD} = \hat{j}$ [ইসহাক স্যার]



$\vec{AB}$ ভেক্টরের সঠিক রূপ কোনটি?
(a) $\frac{\hat{i}+\hat{j}}{4}$ (b) $\frac{\hat{i}-\hat{j}}{2}$
(c) $\frac{\hat{i}+\hat{j}}{2}$ (d) $\frac{\hat{j}-\hat{i}}{2}$

11. $2\hat{i} + 3\hat{j}$ ভেক্টর- [ইসহাক স্যার]
(i) এর মান $\sqrt{13}$ (ii) XY তলে অবস্থান করে
(iii) Z অক্ষের সাথে 90° কোণ উৎপন্ন করে
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii (c) ii, iii (d) i, ii, iii

12. P ও Q এর স্থানাঙ্ক $(3, -2, 1)$ এবং $(3, -4, 5)$। PQ এর মান কত? [ইসহাক স্যার]
(a) $\sqrt{29}$ (b) $\sqrt{20}$ (c) $\sqrt{56}$ (d) $6\sqrt{3}$

13. যদি $\vec{A} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{B} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ হয়, তবে $\vec{B}$ বরাবর $\vec{A}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ কত? [প্রামাণিক স্যার]
(a) $1/\sqrt{3}$ (b) $\sqrt{3}$ (c) $2\sqrt{3}$ (d) $2/\sqrt{3}$

14. এমন একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর যা xy তলের সমান্তরাল এবং $2\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}$ এর সাথে সমকোণে অবস্থিত? [সেলু স্যার]
(a) $\pm\frac{\hat{i}+\hat{j}}{\sqrt{2}}$ (b) $\pm\frac{\hat{k}}{\sqrt{2}}$ (c) $\pm\frac{\hat{i}+\hat{j}}{\sqrt{44}}$ (d) $\pm\frac{\hat{i}+\hat{j}}{2\sqrt{2}}$

15. $2\hat{i} + 3\hat{j}$ ভেক্টরটি x-অক্ষের সাথে কত কোণে আনত? [ইসহাক স্যার]
(a) $\tan^{-1}\frac{3}{2}$ (b) $\cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{13}}$
(c) $\sin^{-1}\frac{2}{3}$ (d) $\cos^{-1}\frac{2}{3}$

16. $\vec{A} = 2\hat{i} + x\hat{j} - 4\hat{k}$ ও $\vec{B} = y\hat{i} + 6\hat{j} - 8\hat{k}$। x ও y-এর মান কত হলে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ পরস্পর সমান্তরাল হবে? [ইসহাক স্যার]
(a) x = 3, y = 4 (b) x = 4, y = 3
(c) x = 6, y = 2 (d) x = 12, y = 1

Educationblog24.com

CamScanner

Educationblog24.com

17. তিনটি ভেক্টর, $\vec{a}, \vec{b}$ ও $\vec{c}$ যাদের মান যথাক্রমে 4, 3 এবং 5, যোগ করলে শূন্য হয় অর্থাৎ, $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$ তাহলে $|\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})|$ এর মান হলো- [তপন স্যার]
(a) 12 (b) 60 (c) 25 (d) 15

নিচের তথ্যের আলোকে পরবর্তী দুইটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
কোনো গতিশীল কণার কোনো মুহূর্তের অবস্থান ভেক্টর $\vec{r} = \hat{i}\cos 5t + \hat{j}\sin 5t$.

18. কণার তাৎক্ষণিক বেগ $\vec{v}$ হবে- [সেলু স্যার]
(a) $5(\hat{j}\cos 5t - \hat{i}\sin 5t)$ (b) $(\hat{j}\cos 5t - \hat{i}\sin 5t)$
(c) $5(\hat{i}\cos 5t + \hat{j}\sin 5t)$ (d) $(\hat{j}\cos 5t + \hat{i}\sin 5t)$

19. $\vec{r}$ ভেক্টরের ক্ষেত্রটি হল- [সেলু স্যার]
(i) সলিনয়ডাল (ii) অঘূর্ণনশীল (iii) ঘূর্ণনশীল
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i (b) i, ii (c) i, iii (d) i, ii, iii

20. $\vec{A} = (px+y)\hat{i} + (y-2z)\hat{j} + (x+3z)\hat{k}$ ভেক্টরটি সলিনয়ডাল হবে যদি p =? [ইস্হাক স্যার, প্রামাণিক স্যার]
(a) 2 (b) 4 (c) 3 (d) −4

21. স্রোত না থাকলে একজন লোক 4 মিনিটে সাঁতার কেটে আড়াআড়িভাবে 100 মিটার প্রশস্ত একটি নদী অতিক্রম করতে পারবে এবং স্রোত থাকলে তার সময় লাগে 5 মিনিট। স্রোতের বেগ নির্ণয় কর।
(a) 10 m/min (b) 20 m/min
(c) 15 m/min (d) 25 m/min

22. একজন লোক পশ্চিম দিক বরাবর 5 kmh^{-1} বেগে চলছে। বৃষ্টি উল্লম্বভাবে তার মাথার উপর 12 kmh^{-1} বেগে পড়ছে। বৃষ্টির প্রকৃত বেগ কত?
(a) 13 ∠22.6° (b) $\sqrt{119}$∠22.6°
(c) 17∠45° (d) None

23. একটি বাক্সের তিনটি ধার $\vec{A} = 2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$; $\vec{B} = 4\hat{j}$ ও $\vec{C} = 5\hat{j}+3\hat{k}$ ভেক্টর তিনটি দ্বারা সূচিত হয়। বাক্সটির আয়তন কত?
(a) 12 (b) 15 (c) 24 (d) 32

24. $\vec{A} = 2a\hat{i} + a\hat{j} - a\hat{k}$, $\vec{B} = a\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{A}\perp\vec{B}$ হলে, a =?
(a) 2, −3 (b) −1, 3 (c) 0, $\frac{3}{2}$ (d) 3, −2

25. $|\vec{a}\times\vec{b}|^2 + |\vec{a}.\vec{b}|^2 = 144$; $|\vec{a}| = 3$ হলে $|\vec{b}|$ =?
(a) 16 (b) 8 (c) 3 (d) 4

26. একটি নদীতে স্রোতের বেগ x kmh^{-1}। যদি একটি নৌকাকে 2x kmh^{-1}। বেগে চালনা করা হয়, তবে নৌকাটিকে স্রোতের সাথে কত কোণে চালালে তা সোজাসুজি অপর পাড়ে পৌঁছাবে?
(a) 60° (b) 240° (c) 120° (d) 90°

27. বায়ু ভূমির সমান্তরালে উত্তর দিকে 5 kmh^{-1} বেগে প্রবাহিত হলে, (i) পূর্বদিকে, (ii) পশ্চিম দিকে এবং (iii) খাড়া উপরের দিকে উপাংশ কত?
(a) 0,0,1 (b) 5,0,0 (c) 5,5,0 (d) 0,0,0

28. 4 kmh^{-1} বেগে প্রবাহিত নদী সোজাসুজি পাড়ি দিতে একটি নৌকার কত সময় লাগবে? [যখন নৌকার বেগ 5 kmh^{-1}, নদীর প্রস্থ 1000m]
(a) $\frac{1}{\sqrt{41}}$hr (b) $\sqrt{40}$hr (c) 0.9hr (d) $\frac{1}{3}$hr

29. পরস্পর সমকোণে চলমান দু'টি বস্তু প্রতি সেকেন্ডে 6m ও 8m বেগে চলতে থাকলে একটির সাপেক্ষে অপরটির বেগ কত?
(a) 10ms^{-1} (b) 8ms^{-1} (c) 6ms^{-1} (d) 12ms^{-1}

30. $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ θ হলে, $\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{A})$ =?
(a) $A^2B\cos\theta$ (b) $A^2B\sin\theta$
(c) 0 (d) A^2B

সম্ভাব্য MCQ প্রশ্নের সমাধান

01. b	02. d	03. b	04. c	05. c	06. a	07. a	08. a	09. b	10. b
11. d	12. b	13. b	14. a	15. b	16. a	17. b	18. a	19. b	20. d
21. c	22. a	23. c	24. c	25. d	26. c	27. d	28. d	29. a	30. c

01. Solⁿ: (b); $R_{max} = P + Q = 12$
$R_{min} = P - Q = 2 \therefore P = 7 \therefore Q = 5$

02. Solⁿ: (d); $P = \sqrt{P^2 + P^2 + 2.P.P\cos\theta}$
$\Rightarrow P^2 = 2P^2 + 2P^2\cos\theta \Rightarrow 1 = 2 + 2\cos\theta$
$\therefore \alpha = 120°$

03. Solⁿ: (b); দুটি একক ভেক্টরের সমষ্টি একটি একক ভেক্টর হলে তখন, $\alpha = 120°$ হবে। বিয়োগফল এর ক্ষেত্রে তখন, $\alpha = 60°$।
$R^2 = (1)^2 + (1)^2 + 2\times1\times1\times\cos 60°$
$\Rightarrow R^2 = 3 \therefore R = \sqrt{3}$

04. Solⁿ: (c); $A + B = 28$; $A - B = 4 \Rightarrow A = 16, B = 12$
$\therefore R = \sqrt{(16)^2 + (12)^2 + 2.16.12\cos 90°}$ একক $= 20$ একক

05. Solⁿ: (c); $(10\sqrt{2})^2 = (10)^2 + (10)^2 + 2.10.10\cos\alpha$
$\Rightarrow 0 = 200\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = 0 \therefore \alpha = 90°$

07. Solⁿ: (a); $F\sin\theta = 100\sin 30° = 50$ N

09. Solⁿ: (b); C বিন্দুর স্থানাঙ্ক (1, 1)
$\therefore OC = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ একক।
আবার, OA = 1 একক
OABC আয়তের ক্ষেত্রফল $= (1\times\sqrt{2})$ বর্গ একক
$= \sqrt{2}$ বর্গ একক

CamScanner

Educationblog24.com

10. **Solⁿ: (b);**

$\overrightarrow{OC} = \frac{\hat{i}}{2}$; $\overrightarrow{OD} = \frac{\hat{j}}{2}$

$\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$

$= \frac{1}{2}(\hat{i} - \hat{j})$

$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\hat{i} - \hat{j})$

13. **Solⁿ: (b);** $A\cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{B}|} = \frac{2+2+2}{\sqrt{12}} = \sqrt{3}$

15. **Solⁿ: (b);** $\alpha = \cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{2^2+3^2}} = \cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{13}}$

16. **Solⁿ: (a);** $\frac{2}{y} = \frac{x}{6} = \frac{-4}{-8} \therefore x = 3, y = 4$

17. **Solⁿ: (b);** $|\vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b})| = |\vec{c} \times (ab\sin 90^\circ \hat{\eta})|$

$= |abc\sin 90^\circ \hat{\eta}| = abc = 4 \times 3 \times 5 = 60$

18. **Solⁿ: (a);** $\vec{r} = \hat{i}\cos 5t + \hat{j}\sin 5t$

t সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে,

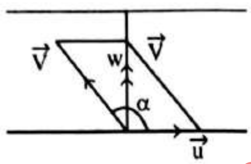
$\vec{v} = -5\hat{i}\sin 5t + 5\cos 5t\,\hat{j}$

20. **Solⁿ: (d);** $\vec{\nabla}.\vec{p} = 0 \Rightarrow \left(\hat{i}\frac{\delta}{\delta x} + \hat{j}\frac{\delta}{\delta y} + \hat{k}\frac{\delta}{\delta z}\right)$

$.\left((px+y)\hat{i} + (y-2z)\hat{j} + (x+3z)\hat{k}\right) = 0$

$\Rightarrow p + 1 + 3 = 0 \Rightarrow p = -4$

21. **Solⁿ: (c);** স্রোতের বেগ u, লোকটির বেগ v ও স্রোত থাকাকালীন সময়ে লব্ধি বেগ w হলে,



$\therefore v = \frac{100}{4} = \frac{25m}{min}$; $w = \frac{100}{5} = 20$ m/min

যেহেতু, যেকোনো ভেক্টরকে তার মান ও দিক অপরিবর্তিত রেখে সরিয়ে নেয়া যায় সেহেতু চিত্র হতে পাই, $v^2 = w^2 + u^2$

$\Rightarrow u^2 = v^2 - w^2 = 25^2 - 20^2$

$\therefore u = 15$ m/min **(Ans.)**

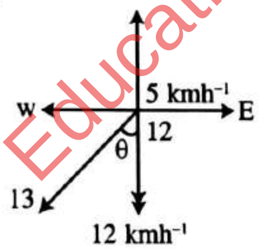
22. **Solⁿ: (a);** $\tan\theta = \frac{5}{12}$

$\therefore \theta = 22.62^\circ$

বৃষ্টির প্রকৃত বেগ

$= \sqrt{5^2 + 12^2}\text{kmh}^{-1}$

$= 13\text{kmh}^{-1}$



23. **Solⁿ: (c);** বাক্সের তিনটি ধার $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$

$\vec{B} = 4\hat{j}$; $\vec{C} = 5\hat{j} + 3\hat{k}$

$\therefore$ বাক্সের আয়তন $= \vec{A}\cdot(\vec{B} \times \vec{C}) = (2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k})\cdot(12\hat{i}) = 24$ ঘন একক।

24. **Solⁿ: (c);** $\vec{A} = 2a\hat{i} + a\hat{j} - a\hat{k}$; $\vec{B} = a\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$

$\vec{A} \perp \vec{B}$ হলে $\vec{A}.\vec{B} = 0$ হবে

এখন, $\vec{A}.\vec{B} = 2a^2 - 2a - a = 0$

$\Rightarrow a(2a - 3) = 0 \Rightarrow a = 0, \frac{3}{2}$

25. **Solⁿ: (d);** $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 + |\vec{a}.\vec{b}|^2 = 144$

$\Rightarrow (ab\sin\theta)^2 + (ab\cos\theta)^2 = 144$

$\Rightarrow a^2b^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = 144$

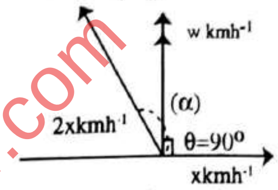
$\Rightarrow 3^2 \times b^2 = 144$; $[\because |\vec{a}| = 3]$

$\therefore b = \sqrt{\frac{144}{9}} = 4$

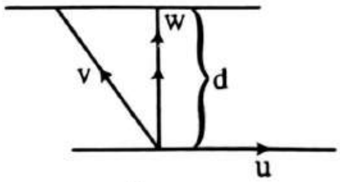
26. **Solⁿ: (c);** এখন, $\tan 90^\circ = \frac{2x.\sin(\alpha)}{x+2\times\cos(\alpha)}$

$\Rightarrow \frac{1}{0} = \frac{2\sin\alpha}{1+2\cos(\alpha)} \Rightarrow 1 + 2\cos\alpha = 0$

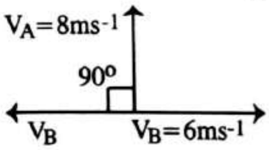
$\Rightarrow \cos\alpha = \left(-\frac{1}{2}\right) \therefore \alpha = 120^\circ$



28. **Solⁿ: (d);** $t = \frac{d}{w} = \frac{d}{\sqrt{v^2-u^2}} = \frac{1}{\sqrt{5^2-4^2}}\text{hr} = \frac{1}{3}\text{hr}$



29. **Solⁿ: (a);**



এখন, $\vec{v}_{AB} = \vec{v}_A + (-\vec{v}_B)$; $|\vec{v}_{AB}|$

$= \sqrt{8^2 + 6^2} = 10\text{ ms}^{-1}$

সম্ভাব্য Written প্রশ্ন

01. একটি জাহাজ প্রতি ঘণ্টায় 20 km বেগে পূর্ব দিকে গতিশীল। একটি নৌকা উত্তরের সাথে 30° কোণ করে পূর্ব দিকে যাচ্ছে। নৌকার বেগ কত হলে জাহাজটি থেকে মনে হবে নৌকাটি সর্বদাই উত্তর দিকে যাচ্ছে? [ইসহাক স্যার] **[Ans: 40 kmh⁻¹]**

02. একটি ভেক্টর $\overrightarrow{OA}$-এর আদি বিন্দু ও অন্তিম বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(0,0,0)$ এবং $(4,-5,6)$। ভেক্টরটিকে স্থানাঙ্কের সাহায্যে প্রকাশ কর। এর পরম মান নির্ণয় কর এবং ভেক্টরটির অভিমুখে একক ভেক্টর নির্ণয় কর। [ইসহাক স্যার] **[Ans: $\frac{4\hat{i}-5\hat{j}+6\hat{k}}{\sqrt{77}}$]**

03. $\vec{P} = -6\hat{i} + a\hat{j} - 12\hat{k}$ যদি $(1,1,-1)$ বিন্দুতে $\vec{A} = xz^2\hat{i} - 2x^3y\hat{j} + 3yz^3\hat{k}$-এর কার্ল ভেক্টরের সমান্তরা হয় তবে 'a' এর মান নির্ণয় কর। [ইসহাক স্যার] **[Ans: -4**

04. $2\vec{A}$ এবং $\vec{A}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পরের সঙ্গে একটি নির্দিষ্ট কো আনত। প্রথম ভেক্টরকে দ্বিগুণ করলে লব্ধির মান তিনগুণ বৃদ্ধি হ ভেক্টরদ্বয়ের অন্তর্বর্তী কোণ কত? [ইসহাক স্যার] **[Ans: 180**

CamScanner

Educationblog24.com

05. $\vec{A} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 6\hat{k}$। ভেক্টরটির সঙ্গে $\vec{B}$ যোগ করলে, X-অক্ষ বরাবর একটি একক ভেক্টর পাওয়া যায়। তাহলে $\vec{B}$ ভেক্টরটি নির্ণয় কর। [ইসহাক স্যার] **[Ans: $-\hat{i} - 4\hat{j} + 6\hat{k}$]**

06. $\vec{A} = \hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}$ ও $\vec{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ হলে $\vec{B}$ বরাবর $\vec{A}$-এর অভিক্ষেপ বা অংশক নির্ণয় কর। [ইসহাক স্যার] **[Ans: 4]**

07. $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ ভেক্টর দুটির মধ্যবর্তী কোণ 45°। $|\vec{a} \times \vec{b}|$ এবং $|\vec{a} \cdot \vec{b}|$ এর অনুপাত কত? [ইসহাক স্যার] **[Ans: 1: 1]**

08. এমন একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর যা XY তলের সমান্তরাল এবং $2\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}$ এর সাথে সমকোণে অবস্থিত। [ইসহাক স্যার] **[Ans: $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{i} + \hat{j})$]**

09. A, B এবং C বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (1, 2, 3), (2, 3,1) এবং (3, 1, 2)। ভেক্টর পদ্ধতিতে বাহু তিনটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় করে ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [ইসহাক স্যার] **[Ans: $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ বর্গ একক।]**

10. একটি সামান্তরিকের সন্নিহিত বাহু দুটি যথাক্রমে $\vec{A} = \hat{i} - 4\hat{j} - \hat{k}$ এবং $\vec{B} = -2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$। সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [ইসহাক স্যার] **[Ans: $\sqrt{107}$ বর্গ একক]**

11. $\vec{A} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$ এবং $\vec{B} = 7\hat{i} + 24\hat{j}$; এমন একটি ভেক্টর নির্ণয় কর যার মান $\vec{B}$-এর সমান এবং অভিমুখ $\vec{A}$-এর সমান্তরাল। [ইসহাক স্যার] **[Ans: $15\hat{i} + 20\hat{j}$]**

12. একটি নদীর স্রোতের বেগ 5 ms^{-1}। 10 ms^{-1} বেগের একটি নৌকায় সোজাসুজিভাবে নদী পাড়ি দিতে 1 min 40 s সময় লাগে। নদীর প্রস্থ কত? [তপন স্যার] **[Ans: 866.03 m]**

13. $\vec{R} = 5\hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k}$ হলে $\vec{R}$ ভেক্টরটির X, Y ও Z অক্ষের সাথে উৎপন্ন কোণ নির্ণয় করো। [তপন স্যার] **[Ans: 138.09°]**

14. $\vec{A} = 5\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}$, $\vec{B} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}$ এবং $\vec{C} = \hat{i} + m\hat{j} + 3\hat{k}$। m-এর মান কত হলে ঘনবস্তুর আয়তন 9 ঘন একক হবে? [তপন স্যার, প্রামাণিক স্যার] **[Ans: −1]**

15. ঘণ্টায় 40 km বেগে পূর্বদিকে চলমান একটি গাড়ির চালক ঘণ্টায় $40\sqrt{3}$ km বেগে একটি ট্রাককে উত্তর দিকে চলতে দেখল। ট্রাকটি প্রকৃতপক্ষে কোন দিকে কত বেগে চলছে? [প্রামাণিক স্যার] **[Ans: গাড়ির প্রকৃত বেগ 80 kmh^{-1} এবং দিক হলো পূর্বদিকের সাথে 60° কোণ।]**

16. যদি, $\vec{r}_1 = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{r}_2 = \hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$, $\vec{r}_3 = -2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\vec{r}_4 = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 5\hat{k}$ হয় তবে a, b ও c এর মান নির্ণয় কর যেন $\vec{r}_4 = a\vec{r}_1 + b\vec{r}_2 + c\vec{r}_3$ হয়। [প্রামাণিক স্যার] **[Ans: a = −2, b = 1, c = −3]**

17. দুটি ভেক্টর $\vec{P} = \hat{i}t^2 - \hat{j}t + \hat{k}(2t + 1)$ এবং $\vec{Q} = \hat{i}5t + \hat{j}t - \hat{k}t^3$ হলে $\frac{d}{dt}(\vec{P} \cdot \vec{Q})$ এবং $\frac{d}{dt}(\vec{P} \times \vec{Q})$ নির্ণয় করো। [প্রামাণিক স্যার] **[Ans: $(4t^3 - 4t - 1)\hat{i} + (5t^4 + 20t + 5)\hat{j} + (3t^2 + 10t)\hat{k}$]**

18. $\vec{A} = 2xz^2\hat{i} - xy\hat{j} + 3xz^3\hat{k}$ এবং $\phi = x^2yz$ হলে (1, 1, 1) বিন্দুতে নির্ণয় করো (a) $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ (b) $\vec{\nabla} \times (\phi\vec{A})$ (c) $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})$ [প্রামাণিক স্যার] **[Ans: (a) $\hat{j} - \hat{k}$ (b) $4\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$ (c) $4\hat{i} + 4\hat{k}$]**

19. $F = (x + 3y)\hat{i} + (ay - 2z)\hat{j} + (x + 4z)\hat{k}$,
$\vec{V} = 4xy^3\hat{i} - 3x^2yz\hat{j} - 3xyz\hat{k}$
এবং $\phi = 2x^2yz + 2xyz + 2xz^3$ [সেলু স্যার]

(i) $(1, -1, 1)$ বিন্দুতে div $\vec{V}$ নির্ণয় কর। অথবা, উদ্দীপকের ভেক্টর $\vec{V}$ কী চোঙাকৃতি (Solinoidal)? **[Ans: $\vec{V}$ চোঙাকৃতি নয়।]**

(ii) $(1, 1, -1)$ বিন্দুতে curl $\vec{V}$ নির্ণয় কর। অথবা, উদ্দীপকের ভেক্টর $\vec{V}$ কি ঘূর্ণনশীল (অসংরক্ষণশীল)? **[Ans: $\vec{V}$ ভেক্টরটি ঘূর্ণনশীল।]**

(iii) a-এর মান কত হলে $\vec{F}$ ভেক্টরটি সলিনয়ডাল হবে? **[Ans: −5]**

(iv) $(2, -1, 1)$ বিন্দুতে $\vec{\nabla}\phi$ নির্ণয় কর। অথবা, স্কেলার ক্ষেত্র ϕ কে কীভাবে ভেক্টর ক্ষেত্রে রূপান্তর করা যায়? **[Ans: $-8\hat{i} + 12\hat{j}$]**

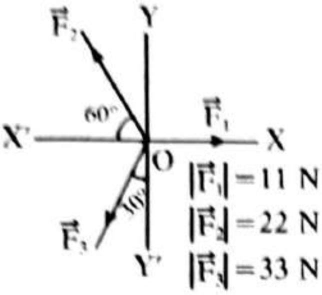
20. একজন সাঁতারু স্থির পানিতে ঘণ্টায় $2\sqrt{2}$ km বেগে সাঁতার কাটতে পারেন। ঘণ্টায় 2 km বেগের স্রোতযুক্ত একটি নদী তিনি সাঁতার কেটে পার হচ্ছেন। (i) সর্বাপেক্ষা কম দূরত্ব অতিক্রম করে অপর তীরে পৌঁছাতে হলে তাকে কোন দিকে সাঁতার কাটতে হবে? (ii) সর্বাপেক্ষা কম সময়ে নদী পার হতে হলে তাকে কোন দিকে সাঁতার কাটতে হবে? (iii) নদীর প্রস্থ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ km হলে, সেক্ষেত্রে অপর পাড়ে পৌঁছাতে কত সময় লাগবে? [সেলু স্যার] **[Ans: 135°; 90°; 21.21 min]**

21. একটি গাড়ির পূর্ব দিকে 50m, তারপর উত্তর দিকে 30 m এবং এরপর উত্তর-পশ্চিম দিকে 30 m গেল। যাত্রাস্থান থেকে গাড়িটির সর্বমোট সরণ নির্ণয় কর। [সেলু স্যার] **[Ans: 58.74m]**

22. দুইটি ভেক্টর $\vec{A} = 2\hat{i} - 6\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 4\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ হলে, $\vec{A} \times \vec{B}$ এর সমান্তরাল একক ভেক্টর নির্ণয় কর। [সেলু স্যার] **[Ans: $= \pm\frac{1}{7}(3\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k})$]**

CamScanner

Educationblog24.com

23. 

$|\vec{F}_1| = 11$ N
$|\vec{F}_2| = 22$ N
$|\vec{F}_3| = 33$ N

[ইসহাক স্যার, সেলু স্যার]

চিত্র অনুযায়ী O বিন্দুস্থ স্থির বস্তুকণার উপর তিনটি বল প্রয়োগ করা হলো।

(a) বস্তুকণার উপর OX বরাবর ক্রিয়াশীল লব্ধি বলের মান নির্ণয় কর। **[Ans: −16.5 N]**

(b) বল প্রয়োগের ফলে বস্তুকণাটি কোন দিকে গতিশীল হবে? গাণিতিক বিশ্লেষণপূর্বক মতামত দাও।

[Ans: OX′ হতে 30° কোণে OY′ বরাবর।]

24. $4\ ms^{-1}$ বেগে প্রবাহিত একটি নদীর এক পাড়ে দাঁড়ানো একজন চোর ঠিক বিপরীত দিকে পুলিশের বোট দেখে স্রোতের দিকে নদীর পার বরাবর সমবেগে দৌড়াতে থাকল। বোটের বেগ $5\ ms^{-1}$ এবং বোটটি স্রোতের সাথে 60° কোণে চলছে। পুলিশের বোট চোরকে ধরে ফেললে চোরের বেগ কত? **[Ans: 6.5 ms^{-1}]**

25. একটি কণার উপর $\vec{F} = (6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$N বল প্রয়োগে কণাটির $\vec{s} = (2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$m সরণ হয়, বল কর্তৃক সম্পাদিত কাজের পরিমাণ কত? **[Ans: 4 জুল]**

26. দেখাও যে, $\vec{A} = (6xy + z^3)\hat{i} + (3x^2 + z)\hat{j} + (3xz^2 + y)\hat{k}$ ভেক্টর ক্ষেত্রটির কোন ঘূর্ণনশীলতা নেই কিন্তু (1,2, −1) বিন্দুতে এটি উৎস হিসেবে কাজ করে।

27. একটি স্রোতস্বিনী নদীতে এমনভাবে নৌকা চালনা করা হলো যেন, সেটি ন্যূনতম পথে অপর তীরে পৌঁছায়। এতে যে সময় লাগে, নদীতে স্রোত না থাকলে তার অর্ধেক সময় লাগে। নৌকার বেগ $2\ ms^{-1}$ হলে স্রোতের বেগ কত? **[Ans: $\sqrt{3}\ ms^{-1}$]**

[ইসহাক স্যার, Advanced]

28. F মানের একটি বলকে দুটি উপাংশে বিশ্লেষণ করলে, একটি উপাংশ যদি বলটির সমমানের হয় এবং এর সাথে সমকোণ উৎপন্ন করে তবে অপর উপাংশটির মান ও দিক নির্ণয় করো। **[প্রামাণিক স্যার, Advanced] [Ans: অপর উপাংশের মান $\sqrt{2}$ F এবং দিক F এর সাথে 45° কোণ।]**

29. $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ দুটি ভেক্টর যেখানে $\vec{A} = a\hat{i}$ এবং $\vec{B} = a(\cos\omega t\,\hat{i} + \sin\omega t\,\hat{j})$ যেখানে a ধ্রুবক এবং $\omega = \frac{\pi}{6} rad \cdot s^{-1}$। যদি $t = \tau$ সময়ে $|\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{3}|\vec{A} - \vec{B}|$ হয়, তাহলে τ এর মান সেকেন্ডে নির্ণয় করো। **[প্রামাণিক স্যার, Advanced]**

[Ans: 2, 14, 26, ...s]

30. পশ্চিম দিকে $4\ kmh^{-1}$ বেগে গতিশীল একজন লোকের কাছে মনে হয় বায়ু দক্ষিণ দিক থেকে প্রবাহিত হয়। লোকটির বেগ দ্বিগুণ করলে তাঁর কাছে মনে হয় বায়ু দক্ষিণ-পশ্চিম দিক থেকে প্রবাহিত হয়। বায়ুর বেগের মান ও দিক নির্ণয় করো। **[প্রামাণিক স্যার, Advanced] [Ans: বায়ুর বেগ $4\sqrt{2}$ kmh এবং এর দিক পশ্চিম দিকের সাথে উত্তর দিকে 45°।]**

31. ঘনকের কর্ণ এবং এর যেকোনো একটি পৃষ্ঠের কর্ণের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় করো। **[প্রামাণিক স্যার, Advanced]**

[Ans: 35.26°]

32. $\vec{A}$ এবং $\vec{B}$ দুটি ভেক্টরের লব্ধির মান $\sqrt{3}$B যা $\vec{A}$ ভেক্টরের সাথে 30° কোণে আনত থাকে। দেখাও যে, A = B অথবা **A** = 2B এবং $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ 60° অথবা 120°।

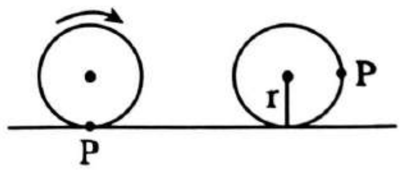
[সেলু স্যার, Advanced] **[Ans: 120°]**

33. দুটি কণা যথাক্রমে $12\ ms^{-1}$ ও $20\ ms^{-1}$ বেগে 120° কোণে ক্রিয়া করে কোনো একটি বিন্দুকে অতিক্রম করে। 4s পরে তাদের মধ্যকার দূরত্ব কত? **[সেলু স্যার, Advanced]**

[Ans: 112m]

34. একই দিকে একজন ব্যক্তি একবার $2ms^{-1}$ বেগে আর একবার $4ms^{-1}$ বেগে চললে বৃষ্টির ফোঁটা যথাক্রমে তার মাথায় উল্লম্বভাবে ও 45° কোণে পড়ে। বৃষ্টির বেগের দিক নির্ণয় করে এবং বৃষ্টির ফোঁটার বেগ নির্ণয় করো। **[Advanced]**

[Ans. 45° উল্লম্বের সাথে, $2\sqrt{2}ms^{-1}$]

35. 

[Advanced]

r = 45 cm হলে, P এর সরণ কত? **[Ans: 260.97 cm]**

CamScanner

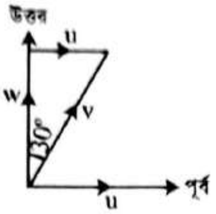
Educationblog24.com

সম্ভাব্য Written প্রশ্নের সমাধান

01. **Sol:** জাহাজের বেগ $\vec{u}$ এবং নৌকার বেগ $\vec{v}$

জাহাজের সাপেক্ষে নৌকার বেগ, $\vec{w} = \vec{v} - \vec{u}$

যেখানে, $\vec{w}$ এর দিক সোজা উত্তর দিকে।



চিত্র হতে, $\sin 30° = \frac{u}{v}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{u}{v} \Rightarrow v = 2u$

$= 2 \times 20\ kmh^{-1}$

$= 40\ kmh^{-1}$ **(Ans.)**

02. **Sol:** $\overrightarrow{OA} = (4-0)\hat{i} + (-5-0)\hat{j} + (6-0)\hat{k}$

$= 4\hat{i} - 5\hat{j} + 6\hat{k}$

∴ পরম মান, $|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{4^2 + (-5)^2 + 6^2}$ একক

$= \sqrt{77}$ একক $= 8.77$ একক

$\overrightarrow{OA}$ এর অভিমুখে একক ভেক্টর, $\hat{\eta} = \frac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|} = \frac{4\hat{i}-5\hat{j}+6\hat{k}}{\sqrt{77}}$ **(Ans.)**

03. **Sol:** $\vec{A} = xz^2\hat{i} - 2x^3y\,\hat{j} + 3yz^3\hat{k}$

$$\therefore \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz^2 & -2x^3y & 3yz^3 \end{vmatrix}$$

$= \hat{i}(3z^3 - 0) - \hat{j}(0 - 2xz) + \hat{k}(-6x^2y - 0)$

$= 3z^3\,\hat{i} + 2xz\,\hat{j} - 6x^2y\hat{k}$

$(1, 1, -1)$ বিন্দুতে, $\vec{\nabla} \times \vec{A} = -3\,\hat{i} - 2\,\hat{j} - 6\hat{k}$

$\Rightarrow \frac{-6}{-3} = \frac{a}{-2} = \frac{-12}{-6} \Rightarrow a = -4$ **(Ans.)**

04. **Sol:** লব্ধি R হলে,

$R^2 = (2A)^2 + A^2 + 2 \cdot 2A \cdot A \cdot \cos\alpha$

$\Rightarrow R^2 = 5A^2 + 4A^2\cos\alpha \ldots\ldots$ (i)

এখন, $(3R)^2 = (4A)^2 + A^2 + 2 \cdot 4A \cdot A \cdot \cos\alpha$

$\Rightarrow 9R^2 = 17A^2 + 8A^2\cos\alpha$

$\Rightarrow 9(5A^2 + 4A^2\cos\alpha) = 17A^2 + 8A^2\cos\alpha$ [(i) হতে]

$\Rightarrow 45A^2 + 36A^2\cos\alpha = 17A^2 + 8A^2\cos\alpha$

$\Rightarrow 28A^2\cos\alpha = -28\ A^2$

$\Rightarrow \cos\alpha = -1 \Rightarrow \alpha = 180°$ **(Ans.)**

05. **Sol:** $\vec{A} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 6\hat{k}$

ধরি, $\vec{B} = x\,\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

$\therefore \vec{A} + \vec{B} = \hat{i} \Rightarrow (2+x)\hat{i} + (4+y)\hat{j} + (z-6)\hat{k} = \hat{i}$

সহগ সমীকৃত করে, $2 + x = 1;\ 4 + y = 0;\ z - 6 = 0$

$\therefore x = -1,\ y = -4,\ z = 6 \therefore \vec{B} = -\hat{i} - 4\hat{j} + 6\hat{k}$ **(Ans.)**

06. **Sol:** $\vec{B}$ বরাবর $\vec{A}$ এর অভিক্ষেপ, $A\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{B}|}$

$= \frac{(\hat{i}-4\hat{j}+5\hat{k})\cdot(6\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k})}{\sqrt{36+9+4}} = \frac{6+12+10}{7} = 4$ **(Ans.)**

07. **Sol:** $\frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{a}\cdot\vec{b}|} = \frac{ab\sin\theta}{ab\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta = \tan 45° = 1$

$\therefore |\vec{a}\times\vec{b}| : |\vec{a}\cdot\vec{b}| = 1:1$ **(Ans.)**

08. **Sol:** $\vec{A} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}$

ধরি, xy তলের সমান্তরাল একক ভেক্টর, $\vec{B} = x\hat{i} + y\hat{j}$

$\vec{A}\cdot\vec{B} = 0 \therefore 2x - 2y = 0 \Rightarrow x = y$

আবার, $\sqrt{x^2 + y^2} = 1 \Rightarrow x^2 + x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = y$

∴ একক ভেক্টর, $\vec{B} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{i} + \hat{j})$ **(Ans.)**

09. **Sol:** $\overrightarrow{AB} = (2-1)\hat{i} + (3-2)\hat{j} + (1-3)\hat{k} = \hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$

$\overrightarrow{BC} = (3-2)\hat{i} + (1-3)\hat{j} + (2-1)\hat{k} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$

$\overrightarrow{CA} = (1-3)\hat{i} + (2-1)\hat{j} + (3-2)\,\hat{k} = -2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$

$\overrightarrow{AB}$ এর দৈর্ঘ্য $= |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$ একক

$\overrightarrow{BC}$ এর দৈর্ঘ্য $= |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$ একক

$\overrightarrow{CA}$ এর দৈর্ঘ্য $= |\overrightarrow{CA}| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$ একক

∴ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= A = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\sqrt{6})^2$ বর্গ একক

$= \frac{3\sqrt{3}}{2}$ বর্গ একক। **(Ans.)**

10. **Sol:** $\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -4 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

$= \hat{i}(-4-1) - \hat{j}(1-2) + \hat{k}(-1-8) = -5\hat{i} + \hat{j} - 9\hat{k}$

∴ ক্ষেত্রফল $= |\vec{A}\times\vec{B}|$ বর্গ একক

$= \sqrt{5^2 + 1 + 9^2}$ বর্গ একক

$= \sqrt{107}$ বর্গ একক **(Ans.)**

11. **Sol:** $\vec{A} = 3\hat{i} + 4\hat{j};\ \vec{B} = 7\hat{i} + 24\hat{j}$

$\vec{A}$ এর দিকে একক ভেক্টর, $\hat{\eta} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{3\hat{i}+4\hat{j}}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{3}{5}\hat{i} + \frac{4}{5}\hat{j}$

∴ নতুন ভেক্টর $= |\vec{B}|\hat{\eta} = \sqrt{7^2 + 24^2}\left(\frac{3}{5}\hat{i} + \frac{4}{5}\hat{j}\right)$

$= 25 \times \left(\frac{3}{5}\hat{i} + \frac{4}{5}\hat{j}\right) = 15\hat{i} + 20\hat{j}$ **(Ans.)**

12. **Sol:** স্রোতের বেগ, $u = 5\ ms^{-1}$

নৌকার বেগ, $v = 10\ ms^{-1}$

সোজাসুজি পাড়ি দিলে $\alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{u}{v}\right)$

$= \cos^{-1}\left(-\frac{5}{10}\right) = 120° \therefore \frac{d}{v\sin\alpha} = t$

$\Rightarrow d = tv\sin\alpha = 100 \times 10 \times \sin 120° = 866.03\ m$ **(Ans.)**

13. **Sol:** $\vec{R} = 5\hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k}$

$\therefore |\vec{R}| = \sqrt{25 + 4 + 36} = \sqrt{65}$

X অক্ষের সাথে উৎপন্ন কোণ, $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{R_x}{|\vec{R}|}\right)$

$= \cos^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{65}}\right) = 51.67°$ **(Ans.)**

Y অক্ষের সাথে উৎপন্ন কোণ $\beta = \cos^{-1}\left(\frac{R_y}{|\vec{R}|}\right)$

$= \cos^{-1}\left(\frac{-2}{\sqrt{65}}\right) = 104.36°$ **(Ans.)**

Z অক্ষের সাথে উৎপন্ন কোণ, $\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{R_z}{|\vec{R}|}\right)$

$= \cos^{-1}\left(\frac{-6}{\sqrt{65}}\right) = 138.09°$ **(Ans.)**

14. **Sol:** প্রশ্নমতে, $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = 9 \Rightarrow \begin{vmatrix} 5 & -2 & 6 \\ 2 & 3 & -6 \\ 1 & m & 3 \end{vmatrix} = 9$

$\Rightarrow 5(9 + 6m) + 2(6 + 6) + 6(2m - 3) = 9$

$\Rightarrow 45 + 30m + 24 + 12m - 18 = 9$

$\Rightarrow 42m = -42 \Rightarrow m = -1$ **(Ans.)**

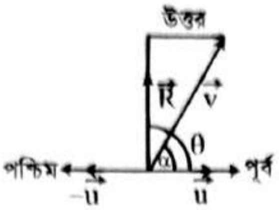
CamScanner

Educationblog24.com

15. Solⁿ: গাড়ির বেগ $= \vec{u}$, ট্রাকের বেগ $= \vec{v}$

∴ গাড়ির সাপেক্ষে ট্রাকের বেগ,

$\vec{R} = \vec{v} - \vec{u}$



এখানে, $u = 40\ kmh^{-1}$,

$R = 40\sqrt{3}\ kmh^{-1}$

$-\vec{u}$ ও $\vec{v}$ এর মধ্যবর্তী কোণ $(180^\circ - \alpha)$

$\therefore \tan 90^\circ = \frac{v\sin(180^\circ-\alpha)}{u+v\cos(180^\circ-\alpha)} \Rightarrow u + v\cos(180^\circ - \alpha) = 0$

$\Rightarrow v\cos\alpha = 40 \ldots\ldots (i)$

আবার, চিত্র হতে পাই, $\Rightarrow v^2 = R^2 + u^2$

$\Rightarrow v^2 = (40\sqrt{3})^2 + (40)^2 \Rightarrow v = 80$

$\therefore$ (i) নং এ, $80\cos\alpha = 40 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$

∴ গাড়ির প্রকৃত বেগ $80\ kmh^{-1}$ এবং দিক হলো পূর্বদিকের সাথে 60° কোণ। **(Ans.)**

16. Solⁿ: $\vec{r}_4 = a\vec{r}_1 + b\vec{r}_2 + c\vec{r}_3$

$\Rightarrow 3\hat{i} + 2\hat{j} + 5\hat{k} = a(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) + b(\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k})$
$+c(-2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}) \Rightarrow 3\hat{i} + 2\hat{j} + 5\hat{k}$

$= (2a + b - 2c)\hat{i} + (-a + 3b + c)\hat{j} + (a - 2b - 3c)\hat{k}$

সহগ সমীকৃত করে, $2a + b - 2c = 3$

$-a + 3b + c = 2$

$a - 2b - 3c = 5$

সমীকরণ তিনটি সমাধান করে, $a = -2, b = 1, c = -3$ **(Ans.)**

17. Solⁿ: $\vec{P} = \hat{i}t^2 - \hat{j}t + \hat{k}(2t - 1)$

$\vec{Q} = \hat{i}5t + \hat{j}t - \hat{k}t^3 \therefore \frac{d}{dt}(\vec{P}\cdot\vec{Q})$

$= \frac{d}{dt}\{(\hat{i}t^2 - \hat{j}t + \hat{k}(2t+1))\cdot(\hat{i}5t + \hat{j}t - \hat{k}t^3)\}$

$= \frac{d}{dt}(5t^3 - t^2 - 2t^4 - t^3) = 12t^2 - 8t^3 - 2t$ **(Ans.)**

$$\vec{P}\times\vec{Q} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ t^2 & -t & 2t+1 \\ 5t & t & -t^3 \end{vmatrix}$$

$= \hat{i}(t^4 - 2t^2 - t) - \hat{j}(-t^5 - 10t^2 - 5t) + \hat{k}(t^3 + 5t^2)$

$\therefore \frac{d}{dt}(\vec{P}\times\vec{Q}) = (4t^3 - 4t - 1)\hat{i}$
$+(5t^4 + 20t + 5)\hat{j} + (3t^2 + 10t)\hat{k}$ **(Ans.)**

18. Solⁿ: $\vec{A} = 2xz^2\hat{i} - xy\hat{j} + 3xz^3\hat{k}$

$\phi = x^2yz$

(a) $$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xz^2 & -xy & 3xz^3 \end{vmatrix}$$

$= \hat{i}(0 - 0) - \hat{j}(3z^3 - 4xz) + \hat{k}(-y - 0)$

$= (4xz - 3z^3)\hat{j} - y\hat{k}$

∴ (1, 1, 1) বিন্দুতে $\vec{\nabla}\times\vec{A}$ এর মান $\hat{j} - \hat{k}$ **(Ans.)**

(b) $\phi\vec{A} = 2x^3yz^3\hat{i} - x^3y^2z\hat{j} + 3x^3yz^4$

$$\therefore \vec{\nabla}\times(\phi\vec{A}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x^3yz^3 & -x^3y^2z & 3x^3yz^4 \end{vmatrix}$$

$= \hat{i}(3x^3z^4 + x^3y^2) - \hat{j}(9x^2yz^4 - 6x^3yz^2)$
$+\hat{k}(-3x^2y^2z - 2x^3z^3)$

∴ (1, 1, 1) বিন্দুতে $\vec{\nabla}\times(\phi\vec{A})$ এর মান

$= \hat{i}(3 + 1) - \hat{j}(9 - 6) + \hat{k}(-3 - 2)$

$= 4\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$ **(Ans.)**

(c) $$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xz^2 & -xy & 3xz^3 \end{vmatrix}$$

$= \hat{i}(0 - 0) - \hat{j}(3z^3 - 4xz) + \hat{k}(-y - 0)$

$= (4xz - 3z^3)\hat{j} - y\hat{k}$

$$\therefore \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 4xz - 3z^3 & -y \end{vmatrix}$$

$= \hat{i}(-1 - 4x + 9z^2) - \hat{j}(0 - 0) + \hat{k}(4z - 0)$

$= \hat{i}(9z^2 - 4x - 1) + \hat{k}(4z)$

∴ (1, 1, 1) বিন্দুতে $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})$ এর মান

$= (9 - 4 - 1)\hat{i} + 4\hat{k} = 4\hat{i} + 4\hat{k}$ **(Ans.)**

19. Solⁿ: (i) $div\,\vec{V} = \vec{\nabla}\cdot\vec{V} = \frac{\partial}{\partial x}(4xy^3) + \frac{\partial}{\partial y}(-3x^2yz)$
$+\frac{\partial}{\partial z}(-3xyz)$

$= 4y^3 - 3x^2z - 3xy$

$(1, -1, 1)$ বিন্দুতে $\vec{\nabla}\cdot\vec{V}$ এর মান

$= 4(-1)^3 - 3(1)^2(1) - 3(1)(-1)$

$= -4 - 3 + 3 = -4$

∴ $\vec{V}$ চোঙাকৃতি নয়। **(Ans.)**

(ii) $$curl\,\vec{V} = \vec{\nabla}\times\vec{V} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 4xy^3 & -3x^2yz & -3xyz \end{vmatrix}$$

$= \hat{i}(-3xz + 3x^2y) - \hat{j}(-3yz - 0)$
$+\hat{k}(-6xyz - 12xy^2)$

$= (3x^2y - 3xz)\hat{i} + 3yz\hat{j} - (6xyz + 12xy^2)\hat{k}$

$(1, 1, -1)$ বিন্দুতে $\vec{\nabla}\times\vec{V}$ এর মান

$= (3 + 3)\hat{i} - 3\hat{j} - (-6 + 12)\hat{k} = 6\hat{i} - 3\hat{j} - 6\hat{k}$

∴ $\vec{V}$ ভেক্টরটি ঘূর্ণনশীল। **(Ans.)**

(iii) $\vec{F}$ ভেক্টরটি সলিনয়ডাল হলে, $\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(x + 3y) + \frac{\partial}{\partial y}(ay - 2z) + \partial z(x + 4z) = 0$

$\Rightarrow 1 + a + 4 = 0$

$\Rightarrow a = -5$ **(Ans.)**

(iv) $\varphi = 2x^2yz + 2xyz + 2xz^3$

$\therefore \vec{\nabla}\varphi = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x}(2x^2yz + 2xyz + 2xz^3)$
$+\hat{j}\frac{\partial}{\partial y}(2x^2yz + 2xyz + 2xz^3)$
$+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z}(2x^2yz + 2xyz + 2xz^3)$

$= (4xyz + 2yz + 2z^3)\hat{i} + (2x^2z + 2xz)\hat{j}$
$+(2x^2y + 2xy + 6xz^2)\hat{k}$

$(2, -1, 1)$ বিন্দুতে $\vec{\nabla}\varphi$ এর মান

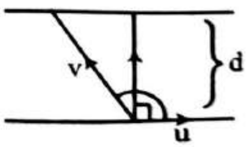
$= (-8 - 2 + 2)\hat{i} + (8 + 4)\hat{j} + (-8 - 4 + 12)\hat{k}$

$= -8\hat{i} + 12\hat{j}$ **(Ans.)**

20. Solⁿ: সাঁতারুর বেগ,

$v = 2\sqrt{2}\ kmh^{-1}$

স্রোতের বেগ, $u = 2\ kmh^{-1}$



(i) সর্বনিম্ন দূরত্বের জন্য, $A = \cos^{-1}\left(-\frac{u}{v}\right)$

$= \cos^{-1}\left(-\frac{2}{2\sqrt{2}}\right)$

$= 135^\circ$ **(Ans.)**

CamScanner

Educationblog24.com

(ii) $t = \frac{d}{v \sin\alpha}$

সর্বনিম্ন সময়ে নদী পার হতে গেলে, $v \sin\alpha$ সর্বোচ্চ হবে।

$\therefore \sin\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 90°$ **(Ans.)**

(iii) $t = \frac{d}{v \sin\alpha} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}\sin 135°} = 0.3535$ h

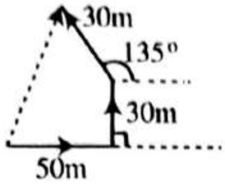
$= 21.21$ min **(Ans.)**

21. **Solⁿ:** x অক্ষের দিকে সরণের উপাংশ

$= (50 + 30\cos 90°$

$+ 30\cos 135°)$ m

$= 28.786$m



y অক্ষের দিকে সরণের উপাংশ

$= (50\sin 0° + 30\sin 90° + 30\sin 135°) = 51.213$m

$\therefore$ লব্ধি সরণ, $s = \sqrt{(28.786)^2 + (51.213)^2}$m

$= 58.75$m **(Ans.)**

22. **Solⁿ:** $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -6 & -3 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix}$

$= \hat{i}(6 + 9) - \hat{j}(-2 + 12) + \hat{k}(6 + 24)$

$= 15\hat{i} - 10\hat{j} + 30\hat{k}$

$\therefore$ সমান্তরাল একক ভেক্টর, $\hat{\eta} = \pm\frac{\vec{A}\times\vec{B}}{|\vec{A}\times\vec{B}|} = \pm\frac{(15\hat{i} - 10\hat{j} + 30\hat{k})}{\sqrt{15^2 + 10^2 + 30^2}}$

$= \pm\frac{1}{35}(15\hat{i} - 10\hat{j} + 30\hat{k})$

$= \pm\frac{1}{7}(3\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k})$ **(Ans.)**

23. (a) **Solⁿ:** OX বরাবর ক্রিয়াশীল লব্ধি বল,

$F_x = F_1 + F_2\cos 120° + F_3\cos 120°$

$= 11 + 22 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 33 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -16.5$ N **(Ans.)**

(b) **Solⁿ:** $F_x = -16.5$ N

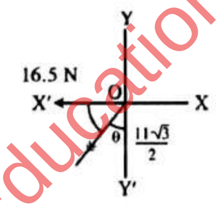
OY বরাবর ক্রিয়াশীল লব্ধি বল,

$F_Y = F_1\cos 90° + F_2\cos 30°$

$+ F_3\cos 150°$

$= 0 + 22 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 33 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= -11.\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{11\sqrt{3}}{2}$

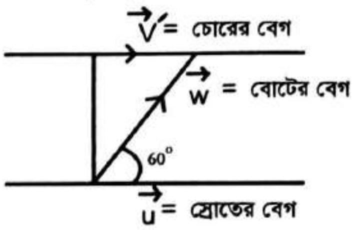


$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{16.5}{\frac{11\sqrt{3}}{2}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{33}{11\sqrt{3}}\right)$

$\therefore \theta = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = 60°$

$\therefore$ OX′ হতে 30° কোণে OY′ বরাবর। **(Ans.)**

24. **Solⁿ:** [ভেবে দেখ, কীভাবে পুলিশের বোট নদীর অপর পাড়ে পৌঁছাবে এবং ঠিক ঐ স্থানে থেকে চোরকে ধরবে।



এক্ষেত্রে, নদীর পাড় বরাবর পুলিশের বোটের কার্যকর বেগ, চোরের বেগের সমান হবে।]

এক্ষেত্রে, $u = 4\text{ms}^{-1}$ ও $v = 5\text{ms}^{-1}$

এখন নদীর পাড় বরাবর বোটের বেগ

$= u\cos 0° + v\cos 60° = 4\cos 0° + 5 \times \frac{1}{2} = 6.5\text{ ms}^{-1}$

$\therefore$ চোরের বেগ $= 6.5\text{ ms}^{-1}$ **(Ans.)**

25. **Solⁿ:** $W = \vec{F}.\vec{s} = (6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}).(2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$

$= 12 - 6 - 2 = 4$ জুল।

26. **Solⁿ:** $\vec{A} = (6xy + z^3)\hat{i} + (3x^2 + z)\hat{j} + (3xz^2 + y)\hat{k}$

ঘূর্ণনশীলতা না থাকলে: $\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$

$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 6xy + z^3 & 3x^2 + z & 3xz^2 + y \end{vmatrix}$

$= \hat{i}\left\{\frac{\partial}{\partial y}(3xz^2 + y) - \frac{\partial}{\partial z}(3x^2 + z)\right\} - \hat{j}$

$\left\{\frac{\partial}{\partial x}(3xz^2 + y) - \frac{\partial}{\partial z}(6xy + z^3)\right\} + \hat{k}$

$\left\{\frac{\partial}{\partial x}(3x^2 + z) - \frac{\partial}{\partial y}(6xy + z^3)\right\}$

$= \hat{i}\{+1 - 1\} - \hat{j}\{3z^2 - 3z^2\} + \hat{k}\{6x - 6x\} = 0$

$\therefore$ অঘূর্ণনশীল।

উৎস হিসেবে কাজ করলে: $\vec{\nabla}.\vec{A} > 0$ হবে

$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right).$

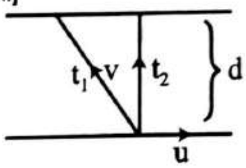
$\{(6xy + z^3)\hat{i} + (3x^2 + z)\hat{j} + (3xz^2 + y)\hat{k}\}$

$= 6y + 0 + 6xz$

$(1, 2, -1)$ বিন্দুতে: $6 \times 2 + 6 \times 1 \times (-1) = 6 > 0$

$\therefore$ উৎস হিসেবে কাজ করে। [দেখানো হলো]

27. **Solⁿ:** ধরি, নৌকার বেগ v, স্রোতের বেগ u, নদীর প্রস্থ d



$t_2 = \frac{t_1}{2} \Rightarrow 2 \times \frac{d}{v} = \frac{d}{\sqrt{v^2 - u^2}}$

$\Rightarrow \frac{v^2}{4} = v^2 - u^2 \Rightarrow 1 = 4 - u^2$

$\Rightarrow u = \sqrt{3}\text{ ms}^{-1}$ **(Ans.)**

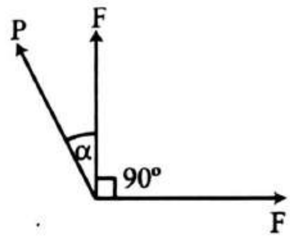
28. **Solⁿ:** $F = \frac{F\sin\alpha}{\sin(90° + \alpha)}$

$\Rightarrow F = \frac{F\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\Rightarrow \tan\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 45°$

$P = \frac{F\sin 90°}{\sin(90° + \alpha)}$

$= \frac{F}{\sin(90° + 45°)} = \sqrt{2}F$



$\therefore$ অপর উপাংশের মান $\sqrt{2}$ F এবং দিক F এর সাথে 45° কোণে এবং অপর উপাংশের সাথে 135° কোণে। **(Ans.)**

29. **Solⁿ:** $|\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{3}|\vec{A} - \vec{B}|$ | $\omega = \frac{\pi}{6}\text{rads}^{-1}$

$\Rightarrow |(a + a\cos\omega t)\hat{i} + a\sin\omega t\,\hat{j}|$

$= \sqrt{3}|(a - a\cos\omega t)\hat{j} - a\sin\omega t\,\hat{j}|$

$\Rightarrow (a + a\cos\omega t)^2 + (a\sin\omega t)^2$

$= 3\{(a - a\cos\omega t)^2 + (a\sin\omega t)^2\}$

$\Rightarrow a^2 + a^2\cos^2\omega t + 2a^2\cos\omega t + a^2\sin^2\omega t$

$= 3(a^2 + a^2\cos^2\omega t + a^2\sin^2\omega t - 2a^2\cos\omega t)$

$\Rightarrow a^2 + 2a^2\cos\omega t + a^2 = 3(a^2 + a^2 - 2a^2\cos\omega t)$

$\Rightarrow 2a^2(1 + \cos\omega t) = 6a^2(1 - \cos\omega t)$

$\Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{2\sin^2\frac{\omega t}{2}}{2\cos^2\frac{\omega t}{2}} \Rightarrow \tan\frac{\omega t}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{\omega t}{2} = n\pi + \frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow \frac{\tau}{2} \times \frac{\pi}{6} = n\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow \tau = 12n + 2$

n এর মান 0, 1, 2 ... ... হলে, τ = 2s, 14s, 26s, ... **(Ans.)**

30. **Solⁿ:** ১ম ক্ষেত্রে, [বায়ুর বেগ v ধরে]

$\tan 90° = \frac{v\sin\theta}{4 + v\cos\theta} \Rightarrow 4 + v\cos\theta = 0$

$\Rightarrow v\cos\theta = -4$ ... ... (i)

CamScanner

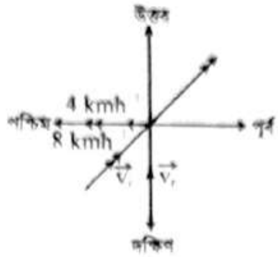
Educationblog24.com

২য় ক্ষেত্রে,

$\tan 135° = \frac{v \sin\theta}{8 + v\cos\theta}$

$\Rightarrow -1 = \frac{v\sin\theta}{8-4}$

$\Rightarrow v\sin\theta = -4$ ...... (ii)



(i) ও (ii) হতে, $\tan\theta = 1 \Rightarrow \theta = 45°$

আবার, $v^2\sin^2\theta + v^2\cos^2\theta = 4^2 + 4^2$

$\Rightarrow v^2 = 32$

$\Rightarrow v = 4\sqrt{2}\ kmh^{-1}$

$\therefore$ বায়ুর বেগ $4\sqrt{2}\ kmh^{-1}$ এবং এর দিক পশ্চিম দিকের সাথে উত্তর দিকে 45°। **(Ans.)**

31. **Sol^n**: ঘনকের কর্ণ নির্দেশক ভেক্টর, $\vec{A} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$

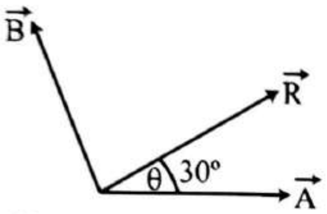
ঘনকের পৃষ্ঠের কর্ণ নির্দেশক ভেক্টর, $\vec{B} = \hat{i} + \hat{j}$

$\therefore$ এদের মধ্যবর্তী কোণ,

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1+1}{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}\right) = 35.26°$ **(Ans.)**

32. **Sol^n**: এখানে, $|\vec{R}| = \sqrt{3}B$

এখন x অক্ষ বরাবর,



$\sqrt{3}B\cos 30° = A + B\cos\alpha$

$\Rightarrow B\cos\alpha = \sqrt{3}B \times \frac{\sqrt{3}}{2} - A$

$\Rightarrow B\cos\alpha = \frac{3}{2}B - A$........ (i)

y অক্ষ বরাবর, $\sqrt{3}B\sin 30° = B\sin\alpha$

$\Rightarrow B\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}B$ .... (ii)

$(i)^2 + (ii)^2$

$\Rightarrow B^2\sin^2\alpha + B^2\cos^2\alpha = \left(\frac{3B}{2} - A\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}B\right)^2$

$\Rightarrow B^2 = \frac{9}{4}B^2 + A^2 - 3AB + \frac{3}{4}B^2$

$\Rightarrow B^2 = \frac{12}{4}B^2 + A^2 - 3AB \Rightarrow A^2 - 3AB + 2B^2 = 0$

$\Rightarrow A^2 - AB - 2AB + 2B^2 = 0$

$\Rightarrow A(A - B) - 2B(A - B) = 0$

$\Rightarrow (A - 2B)(A - B) = 0$

হয়, $A - 2B = 0$ | অথবা, $A - B = 0$

বা, $A = 2B$ | বা, $A = B$ (দেখানো হলো)

আবার,

(i) নং সমীকরণে A = B বসিয়ে, $B\cos\alpha = \frac{3}{2}B - B$

$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60°$

A = 2B বসিয়ে, $B\cos\alpha = \frac{3}{2}B - 2B \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \alpha = 120°$ (দেখানো হলো)

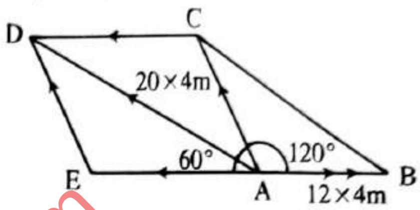
33. **Sol^n**: চিত্রে, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = 12 \times 4m$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{ED} = 20 \times 4m \therefore AD = BC$

$= \left(\sqrt{AE^2 + AC^2 + 2 \times AE + AC \times \cos 60°}\right) \times 4m$

$= \left(\sqrt{12^2 + 20^2 + 2 \times 12 \times 20 \times \frac{1}{2}}\right) \times 4m$

$= (28 \times 4)m = 112m$ **(Ans.)**



34. **Sol^n**: ধরি, বৃষ্টির বেগ v_r, যা দ্বারা অনুভূমিকের সাথে α কোণ এ অবস্থা করছে। যেহেতু লম্বভাবে বৃষ্টি পড়তে দেখছে অনুভূমিক বরাবর বেগের লব্ধি 0। $v_r\cos\alpha + 2 = 0 \Rightarrow v_r\cos\alpha = -2$ ……… (i)

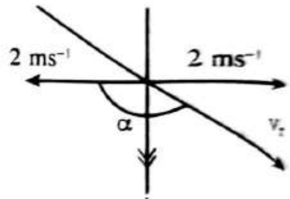
আবার, $4ms^{-1}$ বেগে চলার সময় বৃষ্টি অনুভূমিকের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে = (90° − 45°) = 45°

$\tan 45° = \frac{v_r\sin\alpha}{4 + v_r\cos\alpha}$

$\Rightarrow \frac{v_r\sin\alpha}{4-2}$

$\Rightarrow v_r\sin\alpha$

$= 2$ ……… (ii)



$(i)^2 + (ii)^2$

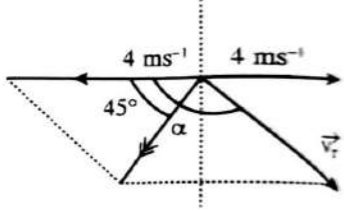
$\Rightarrow v_r^2 = 2^2 + (-2)^2 = 8$

$\therefore v_r = 2\sqrt{2}\ ms^{-1}$

(ii) ÷ (i)

$\Rightarrow \alpha = \pi - \tan^{-1}\left|\frac{-2}{2}\right|$

$= \frac{3\pi}{4} = 135°$



$\therefore$ উল্লম্বের সাথে উৎপন্ন কোণ = (135 − 90)° = 45°

35. সরণ, $AB = \sqrt{(AC)^2 + (BC)^2}$ এখানে, BC = r = 45cm

$AC = 2\pi r \times 0.75 + r = (2\pi \times 45 \times 0.75 + 45)cm.$

$\therefore AB = \sqrt{(45)^2 + (2\pi \times 45 \times 0.75 + 45)^2}$

$= 260.97$ cm **(Ans.)**

"প্রচণ্ড চাপেই হীরার সৃষ্টি হয় সুতরাং ধৈর্য্য ধরো, সুদিন কাছেই।"

\- Sope Agbelus

CamScanner